

Manjkavosti proračunskih modela inženjerskih konstrukcija

Josip Dvornik, Damir Lazarević

Ključne riječi

inženjerske konstrukcije, modeliranje, kompjutorski proračun, numerički model, pouzdanost rezultata, broj uvjetovanosti

Key words

engineering structures, modelling, computer computation, numerical model, reliability of results, number of conditions

Mots clés

structures de génie civil, modélisation, calcul à l'ordinateur, modèle numérique, fiabilité des résultats, nombre des conditions

Ключевые слова

инженерные конструкции, моделирование, компьютерный расчёт, численная модель, надёжность результатов, число обусловленностей

Schlüsselworte

Ingenieurkonstruktionen, Modellieren, Computerberechnung, numerisches Modell, Glaubwürdigkeit der Ergebnisse, Bedingtheitsanzahl

J. Dvornik, D. Lazarević

Pregledni rad

Manjkavosti proračunskih modela inženjerskih konstrukcija

Razmotreni su osnovni tipovi pogrešaka koje prate proračun konstrukcija. Upozorilo se i na one pogreške koje bi se znanjem i iskustvom mogle izbjegnuti. Posebno je upozoreno na pogreške koje nastaju pri tvorbi numeričkih modela, jer se u tome dijelu kompjutorskih proračuna u praksi najviše griješi. Naglašene su i neizbježne pogreške, posebno one koje nastaju pri rješavanju velikih sustava jednačbi. Pokušalo se odgovoriti na pitanja kolika je pouzdanost rezultata naših proračuna.

J. Dvornik, D. Lazarević

Subject review

Deficiencies of design models for engineering structures

Basic types of errors occurring in the design of structures are considered. Particular attention is drawn to errors that could be avoided given appropriate knowledge and experience. A special emphasis is placed on errors occurring during creation of numerical models as it is precisely in this part of computer design that most practical errors are made. Unavoidable errors are also presented, particularly those that occur while great equation systems are being solved. An attempt is made to provide answer to the question of the extent to which our calculation results can be considered reliable.

J. Dvornik, D. Lazarević

Ouvrage de syntèse

Imperfections des modèles pour le calcul des structures de génie civil

Les types principaux des erreurs rencontrées au cours des études des structures sont considérés. Une attention particulière est accordée aux erreurs qui pourraient être évitées moyennant un savoir et une expérience adéquates. L'accent est mis sur les erreurs qui se manifestent au cours de la création des modèles numériques, puisque la majorité des erreurs pratiques sont faites justement durant cette partie des calculs assistés par ordinateur. Les erreurs inévitables sont également présentées, surtout celles se manifestant au cours de la résolution des grands systèmes d'équations. Les auteurs essaient de répondre à la question du niveau de fiabilité de nos calculs.

Ї. Дворник, Д. Лазаревич

Обзорная работа

Недостатки расчётных моделей инженерных конструкций

В работе рассмотрены основные типы ошибок, сопровождающих расчёт конструкций. Обращается внимание и на те ошибки, которые на основании знания и опыта могли быть избежаны. Особо предупреждается об ошибках, возникающих при создании численных моделей, так как в той части компьютерных расчётов в практике появляется больше всего ошибок. Подчёркнуты и неизбежные ошибки, особо те, которые появляются при решении больших систем уравнений. Сделана попытка дать ответы на вопросы, какова надёжность результатов наших расчётов.

J. Dvornik, D. Lazarević

Übersichtsarbeit

Unzulänglichkeiten der Berechnungsmodelle von Ingenieurkonstruktionen

Erwogen sind die grundlegenden Typen der Fehler die die Berechnung von Konstruktionen begleiten. Es wird auf diejenigen Fehler hingewiesen die man durch Wissen und Erfahrung vermeiden könnte. Besonders wird auf die Fehler aufmerksam gemacht die bei der Bildung von numerischen Modellen auftreten, da man in diesem Teil der Computerberechnungen in der Praxis die meisten Fehler begeht. Betont sind auch die unvermeidlichen Fehler, besonders diejenigen die beim Lösen grosser Gleichungssysteme entstehen. Man versuchte auf Fragen über die Glaubwürdigkeit der Ergebnisse unserer Berechnungen zu antworten.

Autori: Prof. dr. sc. **Josip Dvornik**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Damir Lazarević**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb

Iako metoda konačnih elemenata može učiniti dobroga inženjera boljim, lošega inženjera može učiniti mnogo opasnijim.

Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha [1]

1 Uvod

Mi znamo (ili bismo trebali znati) da naši modeli u ograničenom stupnju zamjenjuju stvarne sustave pa ih upotrebljavamo (ili bismo ih trebali upotrebljavati) u skladu s tim. Problem nastaje zbog toga što smo pretjerano ponosni na njih pa ne priznajemo ograničenja i ostavljamo zajednicu u uvjerenju da su modeli točni i sveobuhvatni.

Sharon Beder [2]

Prema povjerenju u točnost i pouzdanost suvremenih statičkih i dinamičkih kompjutorskih proračuna, inženjeri se uglavnom dijele na dvije skupine:

- Članovi jedne skupine skloni su nekritički vjerovati svakoj decimali ako je to napisalo računalo. Prije su takvi pojedinci vjerovali svakoj formuli u nekoj knjizi, čak i ako se radilo o tiskarskoj pogreški, posebno ako je autor bio priznati autoritet. Zanesenost efektno prikazanim rezultatima proračuna (često u živim bojama) zatire svaku sumnju u valjanost tih rezultata.
- Drugi su skeptični i uopće ne vjeruju složenim proračunima. Oni, primjerice, smatraju upotrebu metode konačnih elemenata opasnom jer može stvoriti ne-realni dojam velike točnosti. Prema njihovu mišljenju proračun na računalu ne treba biti točniji od nekadašnjih ručnih proračuna uz pomoć logaritamskog računala, uz minimalni broj jednadžbi, a dovoljnu sigurnost konstrukcije jamče propisi kojih se treba detaljno pridržavati.

Uglavnom, pripadnici obiju skupina površno poznaju temelje i mogućnosti numeričkih metoda.

Naše je mišljenje da su u pravu oni treći koji ne pripadaju ni jednoj ekstremnoj grupi. Oni upotrebljavaju složene proračune na računalu, ali sve kritički provjeravaju i proračune ponavljaju na jednostavnijim modelima. Naravno, i oni se drže načela propisa, ali ne uvijek strogo formalistički, pogotovo onda kada je primjena odredbe propisa u konkretnom slučaju nejasna. Pretežno se radi o inženjerima koji dobro poznaju prednosti i nedostatke numeričkih metoda.

2 Paradoks numeričkoga proračuna — precizan postupak, neprecizan rezultat

Točnost računala je neupitna. Svi znamo da digitalno računalo računa po volji točno, mnogo brže i pouzdanije od čovjeka. Broj raspoloživih znamenki ograničen je samo memorijom računala. Standardni zapis brojeva u inženjerskim kompjutorskim proračunima sadrži petnaest dekadskih znamenaka. Udaljenost od Zemlje do Sunca takvim se brojevima može zapisati s milimetarskom točnošću. Je li tolika točnost smislena i potrebna u građevinarstvu i koliko joj se smije vjerovati? Koliko se uopće može vjerovati našim proračunima?

U ovom ćemo članku pokušati barem djelomično odgovoriti na ova pitanja. Odgovori će biti paradoksalni. Pokazat će se da je točnost podataka, a zbog toga i očekivana točnost rezultata vrlo malena, a ipak će se tvrditi da je nužno računati vrlo točno; ponekad nije dovoljno ni spomenutih petnaest znamenaka.

3 Izvori pogrešaka

Rezultati proračuna imaju velike pogreške u usporedbi sa stvarnim stanjem konstrukcije. Možemo ih podijeliti na one koje se mogu i na one koje ne možemo izbjeći. Ovaj ćemo članak pretežno posvetiti *neizbježnim* pogreškama koje nastaju pri ispravnom proračunu konstrukcija, a manje onima koje su produkt neznanja poput loše koncepcije objekta, lošeg modeliranja, neispravnog kompjutorskog koda, postupka proračuna ili previda poput krivoga množenja. Neizbježne pogreške nastaju:

- 1) pri aproksimaciji projektirane konstrukcije matematičkim modelom,
- 2) pri aproksimaciji matematičkog modela numeričkim,
- 3) pri rješavanju numeričkog modela,
- 4) zbog netočnosti izvedene konstrukcije u odnosu na projektiranu.

Izvori 1) i 4) u ovome će se prikazu svesti na jedan: pogreške koje nastaju zbog razlike između matematičkog modela i izvedene konstrukcije. Te su pogreške, zbog vrlo jednostavnih računskih modela (najčešće opisanih s nekoliko jednadžbi), bile mnogo veće prije upotrebe računala. Iako ti modeli nisu (bili) opterećeni pogreškama tipa 2) i 3), ipak pogreške tipa 1) i 4) dominiraju pa je, sumarno gledano, računalni model ipak mnogo točniji.

4 Razlika između matematičkog modela i izvedene konstrukcije

Gospon inženir! Sam' se vi niš' ne sekirajte. To bu' držalo.

Anonimni poslovođa (iako je armatura bila krivo postavljena)

Ove pogreške nastaju zbog neizbježne idealizacije pri tvorbi matematičkog modela, te netočnih i nepouzdanih ulaznih podataka koje trebamo za njegov proračun. Njima treba pribrojiti i odstupanja izvedene konstrukcije od projekta.

4.1 Pogreške zbog idealizacije

Uzmimo primjer armiranoga betona koji se u lineariziranim proračunima prikazuje kao homogeni i izotropni kontinuum. Međutim, struktura betona i prisutnost armature potvrđuju da to nije točno. Još je lošija aproksimacija ako ziđe, drvo, a posebno temeljno tlo, modeliramo kontinuumom (makar bio nehomogen ili anizotropan).

Nadalje, u modelima se redovito zanemaruju koncentracije naprezanja, zaostala naprezanja, plastifikacija, širenje pukotina, veliki pomaci i velike deformacije te još mnogo različitih pojava.

4.1.1 Kontradikcija proračunski model — propisi

Primjerice, redovna je pojava da proračun konstrukcije obavljamo prema linearnom modelu, a dimenzioniranje prema graničnim stanjima sloma koji su prema definiciji nelinearni. Vidimo da se radi o kontradikciji jer se uvjeti ravnoteže, a time i unutarnje sile linearnoga i nelinearnoga modela bitno razlikuju. Neki propisi npr. dopuštaju slučajevne dimenzioniranja uz uzdužne deformacije betonskoga čelika od čak 2% [3]. Pri takvim deformacijama više ne možemo govoriti o malim zaokretima prema jedinici, što je pretpostavka linearnoga modela. A ipak se i tada njime služimo za proračun unutarnjih sila.

4.1.2 Netočnosti zbog rubnih uvjeta

Zatim, ležajevi koji su u modelu nepokretni ili upeti, u stvarnosti se pokreću i zaokreću zbog deformacija podloge ili temeljnog tla, a na ležajeve koji su u modelu slobodno pokretni u stvarnosti djeluju sile trenja. Slični se problemi pojavljuju i pri izvedbi bilo kojega spoja jer uvijek postoji nesavršena izvedba detalja, pojava nepredviđenih ekscentričnosti i slično, što se projektom (pa i modelom) rijetko uzima u obzir.

4.1.3 Utjecaji imperfekcije

Nelinearne pojave uzrokuju i specifične pogreške. To osobito vrijedi za jaku nelinearnost. (Jaka nelinearnost

je ona koja se ne može dobro aproksimirati lineariziranim modelima.) Tipičan je problem imperfekcija. Zbog malih nesavršenosti, ponašanje konstrukcije može biti bitno različito od ponašanja njezina idealiziranog modela. To vrijedi čak i za konstrukcije izrađene za potrebe istraživanja kod kojih se izvedbene tolerancije poštuju mnogo strože nego što je propisano. Osobito su osjetljivi problemi stabilnosti. Primjerice, poznato je [4] da i uz brižljivo oblikovanje modela tanke cilindrične ljuske i odgovarajućih rubnih uvjeta u laboratoriju nismo u stanju pokusom dobiti kritičnu silu izbočenja zbog uzdužnog pritiska koja bi bila bliska teorijskoj vrijednosti. Problem je vrlo osjetljiv na vrlo male početne nesavršenosti koje, ma koliko se trudili, ne možemo potpuno ukloniti.

Dok kod osnovnih linearnih modela mala imperfekcija uzrokuje malu grešku, na nelinearnim modelima može uzrokovati veliku promjenu rješenja. Za vrijeme proračuna, stvarna imperfekcija je još nepoznata. Proračuni se provode s maksimalnim imperfekcijama u okvirima tolerancije, ali povećanima „na sigurnu stranu”. Ipak, često je teško prognozirati mjerodavni oblik imperfekcije. Važniji se objekti često naknadno provjeravaju prema izmjerenim nepravilnostima. Imperfekcije osobito utječu na metalne konstrukcije, jer su kod njih dimenzije stijenki poprečnih presjeka malene pa problemi stabilnosti češće dolaze do izražaja.

Na imperfekciju značajno utječu i zaostala naprezanja koja nastaju zbog opterećivanja konstrukcije već u tijeku izvedbe (konačno, konstrukcija se uvijek izvodi po fazama, a gotovo uvijek se proračunava kao cjelina), zbog lijevanja, valjanja i zavarivanja (u metalnim konstrukcijama), promjene vlažnosti (u drvu), neravnomjernog skupljanja i puzanja te nejednake starosti betona i slično.

Postoje računalni programi koji mogu uvažiti mnoge navedene (i nenavedene) pojave, ali je njihova ispravna upotreba, kao i interpretacija rezultata, vrlo složena i još uvijek rezervirana za specijaliste. Ako ih se primjenjuje bez razumijevanja, mogu uzrokovati dodatno povećanje pogrešaka uzrokovanih ljudskim faktorom — neznanjem. Trajanje takvih proračuna je mnogostruko dulje od jednostavnijih modela. U tim programima je realnije aproksimirano ponašanje konstrukcije, ali je ipak idealizirano, a podaci su i dalje nepouzdaniji pa se uz pravilnu interpretaciju pogreške samo donekle smanjuju.

4.2 Pogreške u opterećenjima

Vlastitu težinu konstrukcije i neka stalna djelovanja, primjerice težinu vode u mirnom spremniku moguće je vrlo točno izračunati. Ostala se opterećenja najčešće nastoje

procijeniti na sigurnu stranu. Ipak, pokažimo primjerima da razlika između stvarnih i propisanih opterećenja može biti velika.

4.2.1 Stalno opterećenje

Često je slučaj da se u industrijskim objektima tijekom uporabe nabavlja nova oprema koja može biti teža od stare. Pri montaži se teški dijelovi opreme privremeno postavljaju na mjesta na kojima nisu bili predviđeni, a konstrukcija se zbog potrebe montaže dodatno (i često bez provjere) opterećuje skelama.

4.2.2 Pokretno opterećenje

Pogledajmo primjerice kako je raspoređeno korisno opterećenje stropne ploče u vašoj sobi (ormar s knjigama, stolovi, stolci i slično). Možda će se na vaš rođendan okupiti mnogo ljudi, rodbine i prijatelja koji će vjerojatno i zaplesati, pa će opterećenje biti mnogo veće jer će dobiti i dinamička svojstva. Ipak, nadamo se da propisano, dovoljno veliko jednoliko opterećenje, uz primjereni faktor sigurnosti, pouzdano zamjenjuje sva moguća stvarna opterećenja. Na žalost, ovaj postupak ne jamči uvijek dovoljnu sigurnost i zaista se događa da su pokretna opterećenja ponekad podcijenjena.

Primjerice, samo djelomice je riješen problem pritisaka zrnatih materijala u silosima, osobito pri pražnjenju. Propisana opterećenja nisu uvijek na strani sigurnosti. To se može zaključiti iz velikog broja rušenja i oštećenja takvih konstrukcija. (Prema statistikama rušenja, silosi spadaju među najugroženije konstrukcije [5].) Opterećenja, zasnovana na popravljenoj Janssen–Koenenovoj teoriji množe se prema propisima raznih zemalja popravnim koeficijentima. Prateći izmjene propisa kroz više godina, vidi se da se ti koeficijenti „oscilatorno” mijenjaju. U razdobljima čestih havarija, koeficijenti su se korigirali na više, a kada se neko vrijeme nije ništa događalo koeficijenti su se smanjivali radi povećanja ekonomičnosti konstrukcije.

Postoje i primjeri kada je faktor sigurnosti pri djelovanju pokretnoga opterećenje pretjerano visok. Mnogi stari mostovi bili su predimenzionirani za opterećenje koje je odgovaralo potrebama toga vremena pa su i danas, kada je prometno opterećenje možda i nekoliko puta veće, dovoljno sigurni.

4.2.3 Opterećenje snijegom i vjetrom

Popravci slični onima za pokretno opterećenje rade se i za druga djelovanja. U Hrvatskoj je primjerice bilo

povećano propisano opterećenje snijegom sa $0,75 \text{ kN/m}^2$ na $1,25 \text{ kN/m}^2$. Dakako da razlog nije u tome što sada pada više snijega ili u tome što je snijeg postao teži, nego su analize oštećenja i rušenja nekih krovništa pokazale da tada propisano opterećenje nije davalo dovoljnu sigurnost. Sličan trend imaju i propisi za opterećenje vjetrom, posebno nakon analize podataka prikupljenih posljednjih godina.

4.2.4 Opterećenje potresom

Prognoze za djelovanje potresom su osobito grube i zasnivaju se na gruboj (zapravo netočnoj!) pretpostavci da će budući razorni potresi biti po intenzitetu i svojstvima slični onima koji su već registrirani. Za svaku seizmičku zonu je propisano dvostruko veće opterećenje nego za prethodnu. Znači, ako bi se za objekt pri rubu neke seizmičke zone granica vrlo malo pomakla, propisane bi se seizmičke sile razlikovale za 100%. A naslućujemo uz koliku su aproksimaciju te granice povučene na seizmičkoj karti. Tako grubo stupnjevanje je znak slaboga znanja o mogućim *simultanim* djelovanjima svih triju komponenata ubrzanja tla. (Potres je prostorna pojava!)

Zbog nelinearnih pojava realni potres može prouzročiti kaotični odgovor konstrukcije, koji se u propisima nastoji aproksimirati zamjenjujućim linearnim odgovorom. Dokazano je da su tako dobiveni rezultati nerijetko podcijenjeni, zbog čega se mnogi propisi učestalo popravljaju (primjerice slučajno i stvarno torzijsko djelovanje).

Opterećenje spremnika za vodu inercijalnim silama vode pri djelovanju potresa je (za razliku od statičkog opterećenja) samo u načelu poznato. Pojavljuje se vrlo složeni problem dinamičke interakcije fluida i konstrukcije koji također može uzrokovati kaotično ponašanje.

4.3 Pogreške u geometrijskim podacima

Ako su primjerice projektirane dimenzije poprečnog presjeka neke armiranobetonske grede $40 \times 100 \text{ cm}$, a izvedbena je tolerancija $\pm 1 \text{ cm}$, onda je maksimalna relativna greška u površini presjeka oko $\pm 3,5\%$, a u momentu tromosti oko $5,5\%$. Na armiranobetonskoj ploči projektirane debljine 16 cm , razumna pogreška od $\pm 1 \text{ cm}$ (primjerice zbog progiba oplate) uzrokuje pogrešku u krutosti od oko $\pm 20\%$. Grube pogreške — kad se ne poštuju tolerancije, odredbe propisa ili uvjeti iz projekta (na primjer kada podbaci marka betona) mogu prouzročiti još veća odstupanja. Niti jedna od ovih pogrešaka najčešće se ne uzima u obzir.

5 Pogreške zbog aproksimacije matematičkog modela numeričkim

Računalo može upotrijebiti samo naredbe i podatke koji su mu zadani. Ako mu je nešto pogrešno zadano, računalo će dati krivi odgovor. Drugim riječima, računalo ne može samostalno prosuđivati o ispravnosti onoga što mu je zadano.

Ada Byron, Countess of Lovelace,
prva kompjutorska programerka [6]

Kasniji su programeri ovo pravilo nazvali: Smeće unutra, smeće van. Ili skraćeno: GIGO (engl. *Garbage In, Garbage Out*)

Modeliranje metodom konačnih elemenata unosi nove, neizbježne pogreške. Već sama činjenica da kontinuirani matematički model s „neizmerno mnogo nepoznanica” (u svakoj točki modela) aproksimiramo numeričkim modelom s konačnim brojem stupnjeva slobode (u čvorovima mreže) znači pogrešku.

Pogreške u modeliranju nisu specifične samo za metodu konačnih elemenata, premda se, zbog široke upotrebe, samo one spominju u ovom tekstu. Svaka numerička metoda ima sličnih teškoća.

5.1 Pogreške pri aproksimaciji geometrije modela

Geometrijski oblik ruba modela često odstupa od ruba konstrukcije, a prilagođava se oblicima konačnih elemenata. Teško se modelira okolina konkavnih lomova ruba, koji uzrokuju koncentracije naprezanja. Loši oblici elemenata također generiraju pogreške. Iako je poznato da je optimalni oblik četverokutnog elementa kvadrat, a trokutnog jednakostranični trokut, zbog geometrije i rasporeda opterećenja konstrukcije, vrlo se često mora odstupiti od upotrebe samo takvih elemenata. Ipak pogreška može biti zanemariva ako su ta odstupanja u granicama preporučenim za određeni konačni element. Primjerice, većina četverokutnih elemenata bez zamjetnih pogrešaka podnosi oblik četverokuta omjera stranica do 1 : 1,5 s unutrašnjim kutovima u granicama između 60 i 120 stupnjeva [7].

Osim toga, pri modeliranju konstrukcije složenoga oblika ne može se izbjeći uzajamno miješanje međusobno nekompatibilnih elemenata različitih tipova.

5.2 Slabo poznavanje temeljnih načela modeliranja

Osim neizbježnih pogrešaka pojavljuju se i mnogo veće zbog površnosti ili neznanja konstruktora. Često se, primjerice, u projektima nepotrebno upotrebljavaju volumni (engl. *brick*) elementi, gdje bi štapni ili plošni model

bio puno točniji i numerički efikasniji. Pri modeliranju stupova, greda ili ploča takvim elementima, redovito se postiže lošija aproksimacija rješenja.

Ima i primjera da se konstrukcija modelira s premalim brojem ili lošim rasporedom ležajeva koji nisu dovoljni da bi sustav bio izvana statički određen. Neki projektanti misle da je nepotrebno simetričnom i simetrično opterećenom modelu spriječiti antisimetrične pomake krutoga tijela. U slučaju da je vanjsko opterećenje uravnoteženo misle da su ležajevi (ne samo u slučaju simetrije) nepotrebni jer, ako se i predvide, reakcije ionako moraju biti jednake nuli. Takav model generira singularnu (ili gotovo singularnu) globalnu matricu krutosti! S vjerojatnosti od oko 50% takva gruba pogreška prolazi bez vidljivih posljedica. Pogreške zaokruživanja u takvom slučaju djeluju kao spas. Zbog njih matrica nije točno singularna, a vjerojatnost da suma pogrešaka dijagonalnog člana bude pozitivna je oko 50%. Program se ponaša kao da na tome mjestu nije pogreška nego vrlo gipki elastični ležaj krutosti jednake veličini pogreške. Ako je vrijednost dijagonalnog člana slučajno negativna, računalo će dijagnosticirati pogrešku — negativnu krutost na dijagonali matrice (i često se „sam spasiti” umetanjem neke pozitivne vrijednosti $\alpha |k_{\min}|$, gdje je $|k_{\min}|$, po apsolutnoj vrijednosti najmanji član globalne matrice krutosti, a α neki mali broj, primjerice 10^{-3}). Ako globalni sustav jednadžbi ravnoteže modela zapišemo kao $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$, tada možemo reći da je umetanje dovoljnog broja i rasporeda ležajeva nužno za ispravno generiranje matrice krutosti modela (lijeva strana sustava), a nema veze s vektorom opterećenja (desna strana istoga sustava), kako se često misli!

Ne mogu se ovdje nabrojiti sve moguće pogreške u modeliranju jer ih je mnogo, a neki konstruktori u tome pokazuju veliku „kreativnost”. Ima inženjera koji se služe programima, a nisu dovoljno proučili ne samo teoriju i principe modeliranja, nego ni upute za upotrebu programa. Nemoguće je ocijeniti veličinu ovih pogrešaka jer mahom ovise o konkretnom slučaju.

6 Procjena ukupnih pogrešaka na putu od modela do konstrukcije

Pokušajmo sada procijeniti sumu svih do sada navedenih pogrešaka. Općenito, morali bismo biti zadovoljni ako najveće razlike među rezultatima dobrih modela i gotove konstrukcije nisu mnogo veće od 10%, a prosječnih modela do 30%. Pri ovoj su procjeni isključene aproksimacije djelovanja potresa ili vjetra koje mogu prouzročiti mnogo veće pogreške.

Procjena faktora sigurnosti na temelju probabilističkih načela nije ništa preciznija od determinističkih pristupa. Ipak, treba priznati da je teorijski točnija; ali samo teorijski. Poznato je naime da se takvi pristupi temelje na procijenjenim razdiobama vjerojatnosti dobivenim na temelju maloga broja raspoloživih podataka. Štoviše, ključne vrijednosti donosimo na temelju preklapanja malih vrijednosti tih razdioba koje poznajemo još slabije, jer se radi o razdiobama *rijetkih* događaja. Tvrdimo da je zbog toga besmisleno, kako primjerice zahtijeva EC 8 [8], precizirati povratni period djelovanja potresa na 475 godina (umjesto na prijašnjih 500 godina). Propisana bi preciznost zahtijevala temeljito praćenje potresnih zapisa kroz barem nekoliko tisuća godina.

6.1 Dodatne rezerve

Možemo se donekle tješiti činjenicom da dobro koncipirane (posebno višestruko statički neodređene) konstrukcije obično imaju veću sigurnost od proračunske. Izrazito nesigurni podaci nastoje se procijeniti na sigurnu stranu, a nelinearne pojave, kao primjerice plastifikacija, koje u proračunu nisu bile uzete u obzir, najčešće uzrokuju povoljnu preraspodjelu unutarnjih sila koja izgladuje ekstremne naprezanja. Pri tome žilavost (duktilnost) konstrukcija bitno doprinosi povećanju sigurnosti i statički i dinamički opterećenih konstrukcija.

I propisi nastoje u nejasnim slučajevima uvijek biti na sigurnoj strani. Nadamo se, dakle, da postoje dodatne rezerve sigurnosti, a takvo je očekivanje uglavnom u skladu s iskustvom. Čak i mnoge konstrukcije kod kojih su u projektu ili izvedbi napravljene nedopustivo velike pogreške često su u stvarnosti dovoljno sigurne. Slično tome, bili smo svjedoci velikog broja vitalno oštećenih konstrukcija u ratu koje se, na opće čuđenje, ipak nisu srušile. Štoviše, prema proračunima rezerve u takvim ruševinama nisu postojale. Iako je suprotnih primjera mnogo manje, treba biti oprezan. Prošle godine se u svijetu srušilo više objekata, premda se nije radilo o prirodnim katastrofama. Najveću je medijsku pažnju privuklo rušenje dviju velikih ljsaka, jedne u Moskvi, a druge u Parizu. Dakle, optimizam *bez pokrića* može biti opasan.

7 Pogreške pri rješavanju numeričkoga modela

7.1 Vječna dvojba: jednostavniji ili složeniji model

Može se postaviti pitanje: Zašto uopće analizirati konstrukciju vrlo istančanim modelom na računalu, s mnogo jednadžbi, kada ionako moramo očekivati velike pogreške? Podjednaka bi se točnost vjerojatno mogla dobiti i sa mnogo jednostavnijim i grubljim modelom.

Međutim, ne smije se pojaviti dvojba: složeniji ili jednostavniji model. Treba analizirati jedan i drugi. Istina je da nikakav model i uopće ni jedna metoda ne može osigurati veliku točnost bez dovoljno točnih ulaznih podataka. Ipak, realističniji model (uglavnom uvijek možemo dobro izmodelirati makar geometriju objekta) omogućuje bolje razumijevanje djelovanja složene konstrukcije, jer u modelu dolaze do izražaja globalni fenomeni analogni onima na konstrukciji: putovi prijenosa sila, oblici mogućeg gubitka stabilnosti, frekvencije i oblici osciliranja, opasna mjesta za koncentraciju naprezanja, plastifikaciju, širenje pukotina i slično. S druge strane, prednosti jednostavnog modela su mnogo manja akumulacija pogrešaka, lakša interpretacija i mogućnost ručne provjere rezultata. Ako smo sigurni da jednostavniji model sadrži sve što je potrebno, ne treba inzistirati na složenom modelu!

Iako se više puta u ovom članku isticalo da je točnost rezultata malena, ipak se neke pojave određuju mnogo točnije nego druge; to su one koje više ovise o globalnim (integralnim), a manje o lokalnim utjecajima: progibi, najniže frekvencije osciliranja i globalne kritične sile izbočenja. Te veličine ujedno manje ovise o gustoći mreže. Može se primjerice očekivati da se prva frekvencija osciliranja ne razlikuje mnogo na grubljem i detaljnijem modelu. S druge strane, lokalne pojave kao koncentracija naprezanja, pukotine i lokalni gubitak stabilnosti (primjerice zbog izbočenja čvornoga lima) mnogo više ovise o detaljima modeliranja (posebno o gustoći mreže i svojstvima elemenata). Ako proračuni na različitim modelima daju velike razlike u rezultatima, potrebno je naći uzrok. Ako se ne nađe gruba pogreška u jednom ili oba modela treba napraviti i treći.

7.2 Gubitak točnosti zbog rješavanja sustava jednadžbi

Kolika je točnost potrebna pri rješavanju sustava jednadžbi? Ako je realna pogreška zbog svega navedenoga do 30%, čini se besmislenim proračun provoditi na petnaest decimalnih mjesta. Proračunska točnost mora ipak biti veća od očekivane točnosti rezultata, barem za jedan red veličina. Na taj se način zbog pogrešaka pri numeričkim operacijama neće dodatno smanjiti ionako mala (konačna) točnost. Može se grubo procijeniti da bi se pogreška u računskim operacijama morala ograničiti na oko 0,1 do 1%. U doba „ručnih” proračuna najčešće se upotrebljavalo logaritamsko računalo („šiber”) kojim su se mogle očitati dvije dekadske znamenke i procijeniti treća, a to je približno u okviru takvih točnosti.

Profesor Otto Werner često se rugao kada su rezultati statičkih proračuna bili zapisani na mnogo decimala. Običavao je, primjerice, reći: „Kod proračuna željezničkog mosta na toliko znamenaka, uzeta je u obzir čak i težina jabuke koju je strojovođa pojeo prije polaska na put”.

Treba naglasiti da su se u to vrijeme rješavali sustavi od najviše desetak jednadžbi.

7.3 Proračun velikih sustava

Sada ćemo nešto reći o suvremenim kompjutorskim proračunima. Umjesto sustava od nekoliko algebarskih jednadžbi, danas se rješavaju sustavi od nekoliko tisuća ili nekoliko stotina tisuća jednadžbi. Ne smijemo dopustiti da pri rješavanju takvih sustava ukupna pogreška i dalje raste — osim za vrlo mali iznos. Pokušat ćemo uvjeriti čitaoca da je „besmislena” točnost na petnaest decimala nužna; štoviše ponekad nije ni dovoljna!

7.3.1 Numerički pokusi

Da bi se uočilo kako pogreške u računskim operacijama utječu na točnost rezultata, pokazat ćemo rezultate serije jednostavnih numeričkih eksperimenata. Odabrani su sustavi jednadžbi s cjelobrojnom matricom dimenzija $n \times n$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

i cjelobrojnom desnom stranom:

$$\mathbf{f} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T. \quad (2)$$

Poznata su i točna rješenja koja su također cjelobrojna:

$$\mathbf{u} = [1 \quad \cdots \quad 1]^T. \quad (3)$$

U svakom je retku matrice suma svih članova jednaka nuli osim posljednjega retka čija je suma jednaka 1. (Kada bi i u posljednjem retku suma članova bila jednaka nuli, matrica bi bila singularna. To se može zaključiti iz činjenice da bi tada produkt matrice (1) i vektora (3) bio jednak nul-vektoru.) Dimenzija matrice n poprma vrijednosti 25, 50, 100 i 200. Osim broja jednadžbi mijenjala se i pogreška računanja. Ta je pogreška simulirana kao $\text{rnd}[x_a, x_b]$, gdje je rnd oznaka za generator kvazi slučajnih brojeva s uniformnom distribucijom nad segmentom $[x_a, x_b]$. Maksimalna relativna pogreška računanja definirana je kao $1/2|x_a - x_b| \cdot 100$ i priložena je u prvome stupcu tablice 1. Relativna pogreška rezultata definirana je kao $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n|/|\mathbf{u}_n|$, gdje je \mathbf{u}_n numeričko rješenje koje pripada sustavu jednadžbi dimenzije n . U tablici je zapisana samo najveća pogreška u rezultatima dobivenim

na temelju velikoga broja ponavljanja pokusa s točnostima računanja iz određenoga segmenta. Kod svih su sustava (osim za $n = 25$) izostavljene pogreške u rezultatima koje su veće od 100%.

Tablica 1. Ovisnost relativnih pogrešaka računanja i rezultata o broju jednadžbi sustava

relativne pogreške računanja [%]	broj jednadžbi sustava			
	25	50	100	200
	maks. rel. greške rezultata [%]			
0,00125	0,6	1,8	5,3	13,0
0,0025	1,2	3,7	11,0	32,0
0,005	2,4	7,6	25,0	94,0
0,01	4,7	17,0	65,0	—
0,02	9,0	40,0	—	—
0,04	18,0	—	—	—
0,08	45,0	—	—	—
0,16	165,0	—	—	—

Vidi se da pogreške u rezultatima vrlo brzo rastu s porastom pogrešaka u računskim operacijama i s porastom broja jednadžbi u sustavu. S približno „šiberskom” točnošću računanja od 0,16%, sustav od samo 25 linearnih jednadžbi dobio je golemu relativnu pogrešku od 165%. Ovi jednostavni cjelobrojni sustavi odabrani su za eksperimente upravo zbog toga što su poznata točna rješenja pa je jednostavno procijeniti pogrešku rezultata.

U suvremenim kompjutorskim proračunima složenih prostornih konstrukcija metodom konačnih elemenata često se rješavaju sustavi od nekoliko tisuća jednadžbi, pa i mnogo veći.

Pogreške u rezultatima brzo rastu jer se tijekom proračuna akumuliraju. Broj računskih operacija je kod većine direktnih načina rješavanja sustava približno proporcionalan trećoj potenciji reda matrice. Nakon svake operacije međurezultat ima sve manju očekivanu točnost: računa se uvijek s brojevima koji su „naslijedili” pogreške iz dotadašnjeg dijela proračuna, a u svakom koraku se dodaje još i nova greška u zaokruživanju. Ako pogreške nisu istoga predznaka one se djelomično poništavaju, što ponekad usporava njihov porast. Usprkos tome akumulacija je vrlo brza.

Treba još jednom istaknuti da se ovdje pod pojmom „pogrešaka u podacima” ne misli na pogreške aproksimacije realne konstrukcije numeričkim modelom (računalo naravno ne može „znati” realne pogreške, primjerice da će na realnoj konstrukciji neka greda biti za jedan centimetar niža nego u projektu), nego samo o „unutarnjim”

pogreškama samoga modela. Ako je neki realni broj zapisan sa m dekadskih znamenaka on u najboljem slučaju, kada su sve znamenke točno zapisane, ima pogrešku na $(m + 1)$ -voj i daljim nezapisanim znamenkama. Ako je $m = 15$, radi se zaista o velikoj preciznosti zapisa podataka. S obzirom na prikazani primjer ta se preciznost čini pretjeranom. Ipak, ona je i te kako potrebna. Pokažimo u nastavku osnovne razloge „gubitka” velikog broja značajnih znamenki.

7.4 Procjena točnosti rezultata — broj uvjetovanosti

Ukratko ćemo opisati matematičku procjenu očekivane točnosti rezultata proračuna. Norme matrice, vektora desne strane i vektora rješenja označit ćemo sa $\|\mathbf{K}\|$, $\|\mathbf{f}\|$ i $\|\mathbf{u}\|$, a odgovarajuće norme pogrešaka sa $\|\Delta\mathbf{K}\|$, $\|\Delta\mathbf{f}\|$ i $\|\Delta\mathbf{u}\|$. Tada $\|\Delta\mathbf{K}\|/\|\mathbf{K}\|$, $\|\Delta\mathbf{f}\|/\|\mathbf{f}\|$ i $\|\Delta\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\|$ označavaju relativne pogreške u zapisu matrice, vektora desne strane i vektora rješenja.

Norma je općenito pozitivni broj koji karakterizira apsolutnu „veličinu” neke matrice ili vektora. Postoji mnogo različitih norma. Primjerice, poznata euklidska norma vektora je skalar:

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}, \quad (4)$$

a Frobeniusova norma matrice:

$$\|\mathbf{K}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{i,j}^2}. \quad (5)$$

Relativna pogreška u rezultatu $\|\Delta\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\|$ ocjenjuje se kao umnožak broja uvjetovanosti $\text{cond}(\mathbf{K})$ (engl. *condition number*) matrice \mathbf{K} i norme relativne greške u podacima [9]:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{K}) \left(\frac{\|\Delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \right). \quad (6)$$

Numerička vrijednost broja uvjetovanosti $\text{cond}(\mathbf{K})$ se u literaturi procjenjuje na nekoliko načina. Jedna od ocjena je definirana kao umnožak norme zadane matrice \mathbf{K} i norme inverzne matrice \mathbf{K}^{-1} , odnosno:

$$\text{cond}(\mathbf{K}) \leq \|\mathbf{K}\| \cdot \|\mathbf{K}^{-1}\|. \quad (7)$$

Druga ocjena broja uvjetovanosti omjer je maksimalne i minimalne svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{K} :

$$\text{cond}(\mathbf{K}) \leq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})}. \quad (8)$$

Najtočnija je ona norma za koju $\text{cond}(\mathbf{K})$ poprima najmanju numeričku vrijednost. Može se pokazati da su nejednakosti (7) i (8) pesimistične pa s njima dobivamo pre-

velike vrijednosti. Postoje načini da se ocjena broja uvjetovanosti smanji na realniji iznos koji je i tada veći od točnoga. Kada bismo mogli odrediti točni $\text{cond}(\mathbf{K})$, on bi bio manji od svih ocjena, ali usprkos tome vrlo velik.

Matrica tipičnog modela konstrukcije od „samo” nekoliko tisuća nepoznanica može imati broj uvjetovanosti oko 10^6 ili više. To znači da je relativna greška u rezultatima proračuna barem *milijun* puta veća od relativne pogreške u podacima. S porastom sustava jednadžbi, uz jednake ostale uvjete, broj uvjetovanosti postaje sve veći. Drugim riječima, veliki su sustavi samo zbog svoje veličine (čak i bez doprinosa drugih pogrešaka) loše uvjetovani! (Treba naglasiti da ovo vrijedi samo uz ispravno modeliranje. U slučaju loših modela broj uvjetovanosti nije ograničen! Ako matrica teži prema singularnoj, $\lambda_{\min}(\mathbf{K}) \rightarrow 0$, pa prema formuli (8) $\text{cond}(\mathbf{K})$ teži u beskonačnost.) Čak i ako su u podacima sve zapisane znamenke točne, u rezultatu je 6 ili više posljednjih znamenaka nepouzdana. Zašto se te znamenke za vrijeme proračuna ne isključe?

Ovo pitanje podsjeća na stari Austro-Ugarski vic o grofu Bobiju i njegovu prijatelju Rudiju: Rudi je rekao Bobiju da je u vlaku najopasnija vožnja u posljednjem vagonu. Bobi ga je na to pitao: „Pa zašto se onda ne iskopča posljednji vagon?” U našem bi proračunu bilo šest suvišnih „vagona”, što u kompoziciji od njih petnaest i nije tako strašno.

Čini se da još uvijek imamo dosta rezerve. Na žalost postoje ozbiljni razlozi za strepnju.

7.5 Povećanje broja uvjetovanosti prouzročeno lošim modeliranjem

Broj uvjetovanosti matrice krutosti često je dodatno povećan zbog lošeg projektiranja i modeliranja. Spomenut ćemo nekoliko takvih slučajeva.

Što je mreža konačnih elemenata gušća, ona teorijski, uz pretpostavku da nema pogrešaka zaokruživanja, daje točnije rezultate. S druge strane gusta mreža pogoršava uvjetovanost, ponajprije zbog većeg sustava jednadžbi koji joj pripada. Postoji optimalna gustoća, ali mnogi su, ne znajući za numeričke probleme, skloni pregustim mrežama. Kolaju gotovo praznovjerne preporuke, primjerice da je najbolja dimenzija elementa jedan metar bez obzira na dimenzije i složenost konstrukcije (neki čak govore da su to „naučili na fakultetu”). U poglavlju 5.2 dali smo naslutiti da se vitki štap u želji za boljom aproksimacijom često modelira s pomoću velikog broja volumnih elemenata. (Takav je model vizualno vrlo privlačan, ali ništa više od toga.) Redovito se griješi i u izboru oblika mreže elemenata. Ovim se „preporukama”, osim spomenutog pogoršanja aproksimacije rješenja kviri i uvjetovanost numeričkoga modela.

Izbjegava se upotreba kinematičkih ograničenja (engl. *master–slave*) koja značajno poboljšavaju uvjetovanost sustava jednadžbi i učinkovito uklanjaju singularitete u odnosu na uvođenje vrlo krutih elemenata (engl. *penalty formulation*). U ekstremnim slučajevima doprinos krutosti najgipkijeg elementa može biti istog (ili još manjeg) reda veličine od pogreške u zaokruživanju doprinosa najkrućeg elementa. Znači, kao da gipki element u tome čvoru ne postoji.

Neupućeni misle da je glavna prednost ograničenja skraćivanje trajanja proračuna pa se zbog brzih računala ne isplate. Ali, zaboravljaju da ni te prednosti često nema jer se uvođenjem ograničenja „kvari” raspored elemenata matrice krutosti pa je, iako ih je manje, potrebno više memorije, a time i vremena za proračun.

Već je spomenuto da izostavljanje nekog od ležajeva koji su nužni za sprječavanje pomaka promatrane konstrukcije kao krutoga tijela može proći bez vidljivih posljedica. Matrica je tada teorijski singularna ($\det \mathbf{K} = 0$), a u numeričkoj realizaciji je zbog pogrešaka zaokruživanja ipak regularna, ali ekstremno loše uvjetovana ($\det \mathbf{K} \approx 0$). Smanjenu točnost rezultata vrlo se teško opaža ako nije zadan pomak ili opterećenje u smjeru ležajeva koji nedostaju.

Modeli nepravilnih konstrukcija obično su lošije uvjetovani od pravilnih. To su primjerice zgrade koje imaju veliki ekscentricitet između središta mase i središta krutosti, zatim one koje imaju skokovite promjene krutosti po visini ili koje imaju nepravilne i razgranate tlocrte bez dilatacija i slično. Zanimljivo je da su to konstrukcije koje se i po inženjerskim načelima smatraju lošima! Posebno ako su dinamički opterećene.

Može se procijeniti da pogreške spomenute u ovome odjeljku pogoršavaju broj uvjetovanosti najmanje tisuću puta.

Ili prema analogiji s Bobijevim vlakom — broj suvišnih vagona lako dostiže devet.

Ako se doda i neki „faktor sigurnosti”, jer $\text{cond}(\mathbf{K})$ najčešće nije poznat, broj vagona se penje i preko dvanaest, posebice ako je riječ o sustavu od nekoliko stotina tisuća jednadžbi i više. Ako je sustav nelinearan možemo očekivati daljnji porast broja računskih operacija, a time i broja suvišnih vagona. Vidimo da računanje sa „svemirskom” točnošću od petnaest značajnih znamenki nije više besmisleno. U tijeku proračuna treba zadržati problematične znamenke, ali im se nakon završetka proračuna ne smije vjerovati. (Najbolje bi ih bilo izostaviti iz ispisa.)

Ili prema spomenutom vicu — zadržati „opasne” vagonu u vlaku, ali ne dopustiti da se u njima voze putnici i otkopčati ih tek na zadnjoj stanici.

Ne smije se zaboraviti još nešto. Spomenute ocjene za rast pogrešaka vrijede uz pretpostavku upotrebe numerički stabilnih (engl. *robust*) proračunskih postupaka. Osim navedenih neizbježnih pogrešaka (engl. *inherent numerical errors*) izborom lošeg algoritma možemo proizvesti i dodatne inducirane pogreške (engl. *induced numerical errors*).

8 Zaključak

Današnja računala nemaju zdravi razum; još nisu naučila „razmišljati” te rade točno što im kažemo, ni više ni manje. Ovu je činjenicu najteže shvatiti onome koji prvi put pokušava upotrijebiti računalo.

Donald E. Knuth [10]

Komercijalni računalni programi za metodu konačnih elemenata najčešće su vrlo jednostavni za upotrebu (engl. *user friendly*), pa ih s lakoćom upotrebljavaju i inženjeri koji u najboljem slučaju samo površno znaju kako taj program radi, a još površnije poznaju teoriju na temelju koje je izrađen. Proračuni s mnogo decimala i lijepom grafikom prividno su „apsolutno pouzdani pa ih ne treba provjeravati”. Neki misle da je ključni problem vještina u upisivanju podataka.

Sve to nas ne smije zavesti jer moramo znati da u svim fazama modeliranja i proračuna nastaju velike pogreške, čak i onda kada je sve napravljeno najbolje i kad je formalno gledajući sve ispravno. Dakle, pogreške su neizbježne, ali postoje i one, ponekad mnogo veće, koje bi se uz više znanja i pažnje mogle i morale izbjeći.

Propisi svojim odredbama nastoje nadoknaditi posljedice pogrešaka, a to u većini jednostavnijih situacija i uspijevaju. Propisa se, naravno, treba pridržavati, ali treba znati da to nije uvijek dovoljno jamstvo da će biti postignuta potrebna sigurnost. Propisi su prema definiciji skup pravila koja moraju omogućiti dovoljno sigurno, jednostavno i brzo rješavanje velikoga broja praktičnih problema. Baš su zbog te, nužne, zadaće propisi ujedno i manjkavi, odnosno postoji veliki broj situacija (čak i ne jako složenih) koje autori propisa nisu mogli obuhvatiti. Tada se inženjer ne bi smio formalno (birokratski) pridržavati odredaba, nego bi morao razumijeti pretpostavke i ograničenja tih odredaba, te prema potrebi potražiti odgovor teorijskim i/ili numeričkim pristupom. Za složene probleme nisu dovoljne „šprance”, nego je i danas, kao i u doba bez računala, potrebno znanje, iskustvo i intuicija dobrog inženjera.

Zapamtite da su rezultati dobiveni proračunom numeričkoga modela samo procjena ponašanja izvedene konstrukcije. Konstrukcija se ponaša prema temeljnim zakonima fizike, a ne prema propisima ili uputama za korištenje kompjutorskoga programa.

Edward L. Wilson [11]

LITERATURA

- [1] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [2] Beder, S.: *The Fallible Engineer*, <http://www.uow.edu.au/arts/sts/sbeder/fallible.html>
- [3] Tomičić, I.: *Betonske konstrukcije*, DHGK, Zagreb, 1996.
- [4] Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, London, 1973.
- [5] Reimbert M. & A.: *Silos, Theory and Practice*, Trans Tech Publication, Clausthal, Germany, 1976.
- [6] Ada Byron, <http://www.windows.ucar.edu/tour/link=/people/enlightenment/byron.html>
- [7] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [8] *Evrokod 8: Projektovanje seizmički otpornih konstrukcija*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1997.
- [9] Demmel, J. W.: *Applied Numerical Linear Algebra*, Siam, Philadelphia, 1997.
- [10] Knuth, E. D.: *The Art of Computer Programming, Volume 1, Fundamental Algorithms*, Addison – Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- [11] Wilson, E. L.: *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computers and Structures Inc., Berkeley, USA, 1998.