

Primljen / Received: 12.4.2017.

Ispravljen / Corrected: 12.6.2017.

Prihvaćen / Accepted: 20.6.2017.

Dostupno online / Available online: 10.2.2018.

Metoda nekompatibilnih modova – pregled i primjena

Autori:



Prof.dr.sc. **Ivica Kožar**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
ivica.kozar@gradri.uniri.hr



Tea Rukavina, mag.ing.aedif.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
Sveučilište u Compiègneu
Sveučilište Sorbonne, Francuska
tea.rukavina@uniri.hr



Prof.dr.sc. **Adnan Ibrahimbegović**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Compiègneu
Sveučilište Sorbonne, Francuska
adnan.ibrahimbegovic@utc.fr

Pregledni rad

Ivica Kožar, Tea Rukavina, Adnan Ibrahimbegović

Metoda nekompatibilnih modova – pregled i primjena

Metoda konačnih elemenata koristi se u inženjerskoj zajednici već više od 50 godina i za to je vrijeme stalno poboljšavana. Jedno od bitnih poboljšanja odnosi se na uvođenje dodatnih funkcija za opisivanje pomaka ("nekompatibilnih modova") u interpolacije elemenata. Takvo dodavanje ne zadovoljava uvjet kontinuiteta i mora biti provedeno uz određene uvjete kako bi se postigla konvergencija. Prednosti korištenja ove metode jesu poboljšano ponašanje elemenata u nepovoljnim uvjetima opterećenja te mogućnost jednostavnog uzimanja u obzir diskontinuiteta u polju pomaka ili deformacija.

Ključne riječi:

konačni element, funkcija oblika, analiza savijanja, analiza diskontinuiteta, statička kondenzacija

Subject review

Ivica Kožar, Tea Rukavina, Adnan Ibrahimbegović

Method of incompatible modes – overview and application

The finite-element method has been in use in the engineering community for over 50 years, a period during which it has been constantly improved. One important improvement is the addition of required displacement modes ("incompatible modes") into the element's shape functions. Such addition violates the continuity condition, and has to be realised according to certain rules if convergence is to be achieved. The benefits are shown in the element's behaviour under unfavourable loading conditions, and in the possibility of a simplified treatment of strain or displacement discontinuities.

Key words:

finite element, shape function, bending analysis, discontinuity analysis, static condensation

Übersichtsarbeit

Ivica Kožar, Tea Rukavina, Adnan Ibrahimbegović

Methode der inkompatiblen modi – übersicht und anwendung

Die Finite-Elemente-Methode wird in der Ingenieurgesellschaft seit mehr als 50 Jahre angewendet, und wurde während dieser Zeit ständig verbessert. Eines der wichtigsten Verbesserungen bezieht sich auf die Einführung zusätzlicher Funktionen für die Beschreibung der Verschiebung ("inkompatible Modi") bei der Interpolation der Elemente. Eine solche Ergänzung erfüllt nicht die Bedingung der Kontinuität und muss unter bestimmten Bedingungen durchgeführt werden, um eine Konvergenz zu erreichen. Die Vorteile der Anwendung dieser Methode liegen im verbesserten Verhalten der Elemente unter ungünstigen Belastungsbedingungen sowie der Möglichkeit einer einfachen Berücksichtigung der Diskontinuität im Bereich der Verschiebung oder Verformung.

Schlüsselwörter:

Finite-Elemente, Formfunktion, Biegeanalyse, Diskontinuitätsanalyse, statische Kondensation

1. Uvod

Prilično je rano uočeno da je kod konačnih elemenata s malim brojem čvorova najveći problem njihova osjetljivost na "locking efekt" (npr. [1]). Rješenje za to predloženo je kroz obogaćivanje polja pomaka ili deformacija u elementu pa je metoda nazvana metodom nekompatibilnih modova ili jednostavno nekompatibilni modovi.

Metodu nekompatibilnih modova uveli su 1973. godine Wilson i suradnici [2, 3] kao poboljšanje ravninskih i prostornih elemenata nižeg reda kod problema savijanja. Iz analize vlastitih vrijednosti uočeno je da elementi nižeg reda ne mogu na realan način opisati ponašanje pri savijanju iz jednostavnog razloga što im nedostaju odgovarajuće funkcije oblika, koje se upravo zato kroz ovu metodu dodaju u formulaciju. Uvođenjem dodatnih funkcija oblika krši se uvjet kontinuiteta, ali uz određene uvjete može se postići konvergencija [4]. Nekompatibilne funkcije oblika nisu jedinstvene i razlikuju se ovisno o vrsti problema koja se opisuje (male deformacije, velike deformacije, velike rotacije, nestišljivi materijal itd.) Velik broj često korištenih nekompatibilnih funkcija oblika pripada u skupinu elemenata mješovite formulacije [5].

Pokazalo se da navedena metoda ima još nekoliko prednosti, primjerice bolje ponašanje elemenata pri distorziji mreže konačnih elemenata kao i u slučaju gotovo nestišljivih materijala [6]. Osim toga, nekompatibilni elementi ne koriste se samo za poboljšanje ponašanja konačnih elemenata, već i za formulaciju konstitutivnih zakona baziranih na deformacijama ili pomacima (npr. razvoj oštećenja) na razini elementa. U kombinaciji s tehnikom "operator split" (npr. [7]), to omogućuje razdvajanje proračuna razvoja unutarnjih varijabli i jednadžbi ravnoteže na lokalnoj i globalnoj razini, što smanjuje računalnu zahtjevnost problema. Primjena nekompatibilnih modova na geometrijski nelinearne probleme velikih rotacija može se pronaći u [8, 9]. Ovakvi poboljšani elementi mogli bi pronaći svoju primjenu u projektiranju zidova s otvorima [10].

U 2. poglavlju opisana je primjena nekompatibilnih modova za opisivanje diskontinuiteta u polju pomaka i deformacija u 1D. U 3. poglavlju prikazana je primjena na prvobitni problem savijanja gdje je poboljšano ponašanje 2D i 3D četverokutnih elemenata u konstrukciji opterećenoj na savijanje.

2. Metoda nekompatibilnih modova u 1D

2.1. Miješana varijacijska formulacija

Formulacija metode konačnih elemenata uobičajeno se dobiva iz varijacijskog principa baziranog na pomacima, u kojem se slaba formulacija konstruira iz uvjeta ravnoteže. Ako želimo obogatiti polje deformacija uvođenjem poboljšane aproksimacije, moramo konstruirati slabu formulaciju iz sve tri skupine jednadžbi: kinematičkih, konstitutivnih i ravnotežnih. To je mješoviti ili Hu-Washizuov varijacijski princip, gdje su polja pomaka $u(x)$, deformacija $\varepsilon(x)$ i naprezanja $\sigma(x)$ neovisna jedno

o drugome [7]. Za izvođenje metode nekompatibilnih modova, polje deformacija obogaćuje se na sljedeći način:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \quad (1)$$

gdje prvi član predstavlja standardnu deformaciju, a drugi član poboljšanu ili nekompatibilnu deformaciju.

U slaboj formulaciji, jednadžbe ne moraju više biti zadovoljene u svakoj točki domene Ω , nego samo po dijelovima. Slaba formulacija dobiva se množenjem jednadžbe ravnoteže proizvoljno odabranom funkcijom w , koja se naziva težinskom funkcijom, i zatim integriranjem umnoška po cijeloj domeni. Za jednadžbu ravnoteže dobivamo:

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{d\sigma}{dx} + b \right) dx = 0 \quad (2)$$

Što nakon parcijalne integracije daje:

$$G_v = \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \sigma dx - \int_{\Omega} w b dx - [w\bar{t}]_{\Gamma_v} = 0 \quad (3)$$

gdje, $w(x)$ predstavlja polje virtualnih pomaka koje mora biti jednako nuli na rubu domene, $w(x) = 0$ na Γ_v .

Na sličan način, slaba formulacija dobivena iz konstitutivne jednadžbe definirana je u polju virtualnih deformacija $\gamma(x)$ za slučaj linearno elastičnog ponašanja:

$$G_e = \int_{\Omega} \gamma (E\varepsilon - \sigma) dx = 0 \quad (4)$$

Slaba formulacija kinematičke jednadžbe konstruira se u polju virtualnih naprezanja $\tau(x)$:

$$G_\sigma = \int_{\Omega} \tau \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon \right) dx = 0 \quad (5)$$

Jednadžbe (3), (4) i (5) čine mješovitu varijacijsku formulaciju koja je ekvivalentna Hu-Washizuovom funkcionalu [11] za 1D slučaj:

$$\Pi(u, \varepsilon, \sigma) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon E \varepsilon dx + \int_{\Omega} \sigma \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon \right) dx - \int_{\Omega} u b dx - [u\bar{t}]_{\Gamma_v} \quad (6)$$

Polja virtualnih deformacija i virtualnih naprezanja ne moraju zadovoljiti rubne uvjete koji su nametnuti polju virtualnih pomaka. Također, to ne moraju biti kontinuirane, već samo kvadratno integrabilne funkcije [7].

Obogaćeno polje virtualnih deformacija definirano je na analogan način kao polje realnih deformacija u jednadžbi (1):

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \tilde{\gamma} \quad (7)$$

Uvođenjem aproksimacija iz jednadžbi (1) i (7) u jednadžbe (4) i (5), dobiva se sljedeće:

$$G_e = \int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} + \tilde{\gamma} \right) \left[E \left(\frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \right) - \sigma \right] dx = 0 \quad (8)$$

$$G_\sigma = \int_{\Omega} \tau \tilde{\varepsilon} dx = 0 \quad (9)$$

Nadalje, jednadžba (8) može se razdvojiti u dvije jednadžbe:

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \left[E \left(\frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \right) - \sigma \right] dx = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma} \left[E \left(\frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \right) - \sigma \right] dx = 0 \quad (11)$$

Iz jednadžbe (10) slijedi:

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \sigma dx = \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} E \left(\frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \right) dx \quad (12)$$

što uvođenjem u jednadžbu (3) daje:

$$G_v = \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \sigma dx - \int_{\Omega} w b dx - [w \bar{t}]_{r_e} = 0 \quad (13)$$

Jednadžbe (9), (11) i (13) predstavljaju slabu formulaciju za obogaćeno polje pomaka dobiveno pomoću mješovite formulacije i navedene su ovdje:

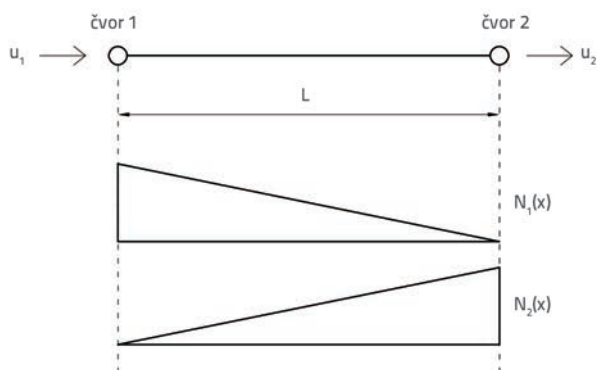
$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \sigma dx - \int_{\Omega} w b dx - [w \bar{t}]_{r_e} = 0$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma} \left[E \left(\frac{du}{dx} + \tilde{\varepsilon} \right) - \sigma \right] dx = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} dx = 0$$

2.2. Implementacija metode konačnih elemenata

Promotrimo štapni konačni element s dva čvora, duljine L i površine poprečnog presjeka A , s jednim osnim stupnjem slobode u_i u svakom čvoru (slika 1.).



Slika 1. Štapni konačni element s dva čvora i njegove funkcije oblika

Uvođenjem formulacije metode konačnih elemenata, obogaćeno polje pomaka može se prikazati kao zbroj kompatibilnog i nekompatibilnog dijela:

$$u(x) = \mathbf{N}u + M(x)\alpha \quad (15)$$

gdje je \mathbf{N} matrica funkcija oblika, u je vektor čvornih pomaka, $M(x)$ je funkcija nekompatibilnog moda, a α je parametar

nekompatibilnog moda. Funkcija $M(x)$ bira se u skladu s karakteristikama problema kojeg želimo opisati, što će se pokazati kroz primjere u idućim poglavljima.

Obogaćeno polje deformacija u (1) dobiva se kao derivacija jednadžbe (15):

$$\varepsilon(x) = \mathbf{B}u + G(x)\alpha \quad (16)$$

gdje je \mathbf{B} matrica koja povezuje deformaciju u elementu i pomake u čvorovima, a $G(x)$ predstavlja derivaciju funkcije nekompatibilnog moda.

Osim uvjeta konvergencije koje moraju zadovoljavati standardni konačni elementi, nekompatibilni elementi moraju zadovoljiti još nekoliko uvjeta [7]:

Nekompatibilno polje deformacija mora biti nezavisno od standardnog polja deformacija, što znači da njihove funkcije oblika ne smiju pripadati istom prostoru:

$$N_i \cap M = \emptyset \quad (17)$$

Parametri naprezanja i parametri nekompatibilnog moda moraju biti međusobno ortogonalni, jer se želi izbjeći pojava naprezanja u aproksimaciji. Zbog toga, svi članovi u (14) koji sadrže parametre naprezanja moraju nestati:

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma} \sigma dx = 0 \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} dx = 0$$

Svaka nekompatibilna deformacija mora biti ortogonalna bilo kojem konstantnom naprezanju i nikakav rad ne smije rezultirati iz međudjelovanja ova dva polja. To osigurava konvergenciju u skladu s "patch"-testom, a pokazano je u [3] da za konstantno naprezanje σ iz jednadžbe (18) slijedi:

$$\int_{\Omega} \bar{G}(x) dx = 0; \quad \bar{G} = G - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} G(x) dx \quad (19)$$

Uvođenjem aproksimacija metode konačnih elemenata za pomake i deformacije u mješovitu formulaciju u (14), dobiven je sustav jednadžbi:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T E \mathbf{A} \mathbf{B} u dx + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T E \mathbf{A} G \alpha dx - \int_{\Omega} \mathbf{N} b A dx - [\mathbf{N} \bar{t} A]_{r_e} = 0 \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} G E \mathbf{A} \mathbf{B}^T u dx + \int_{\Omega} G E \mathbf{A} G \alpha dx = 0$$

Nakon uvođenja supstitucija:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T E \mathbf{A} \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T E \mathbf{A} G dx$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} G E \mathbf{A} G dx$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N} b A dx - [\mathbf{N} \bar{t} A]_{r_e}$$

jednadžbe (20) postaju:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}^T \alpha = \mathbf{f} \tag{22}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{u} + \mathbf{H}\alpha = 0$$

što se može zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Primjenom statičke kondenzacije matrica krutosti reducira se na istu veličinu kao i vektor čvornih pomaka. Iz druge jednadžbe u (22) slijedi:

$$\alpha = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u} \tag{24}$$

Uvođenjem (24) u prvu jednadžbu u (22), dobiva se:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F})\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{25}$$

gdje prvi član predstavlja kondenziranu matricu krutosti:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{26}$$

pa se naposljetku može zapisati:

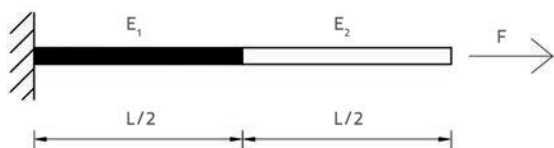
$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{27}$$

Metoda nekompatibilnih modova izvedena u ovom poglavlju može se primijeniti na različite probleme u mehanici. U idućim poglavljima predstavljena su dva primjera u 1D okruženju: u prvom primjeru radi se o štapu sastavljenom od dva različita materijala, a u drugom primjeru radi se o štapu s ugrađenim diskontinuitetom koji simulira otvaranje pukotine.

2.3. Primjeri

2.3.1. Diskontinuitet u polju deformacija za heterogeni štap

Promotrimo štap duljine L koji je sastavljen od dva različita materijala, gdje se granica između njih nalazi upravo na sredini elementa $\bar{x} = L/2$. Moduli elastičnosti lijevog i desnog dijela štapa označeni su s E_1 i E_2 , tako da vrijedi $E_1 > E_2$. Lijevi kraj štapa je ukliješten, dok na desnom kraju djeluje sila F (vidi sliku 2.). Štap ima sljedeće geometrijske i materijalne karakteristike: $E_1 = 1000$, $E_2 = 500$, $L = 1$, $A = 1$ i $F = 300$.



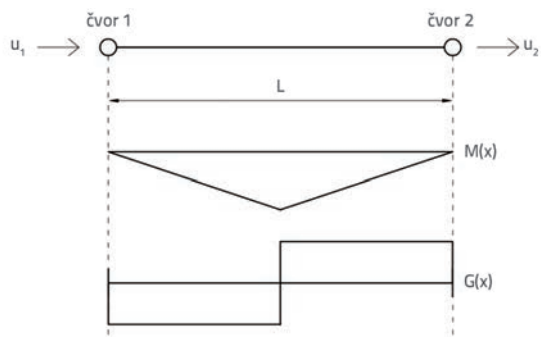
Slika 2. Heterogeni štap sastavljen od dva različita materijala

Kako je štap sastavljen od dva različita materijala, postoji diskontinuitet u polju deformacija na sredini elementa. Takav diskontinuitet naziva se još i slabim diskontinuitetom, za razliku od diskontinuiteta u polju pomaka koji se naziva jakim diskontinuitetom i koji će biti prikazan u idućem poglavlju. U [12] obje vrste diskontinuiteta ugrađene su u jedan element.

Ovaj primjer heterogenog štapa može se lako riješiti pomoću dva standardna konačna elementa s različitim materijalnim karakteristikama. Iz jednostavnog proračuna dobivaju se vrijednosti pomaka u čvorovima:

$$u(x = L/2) = 0.15; u(x = L) = 0.45 \tag{28}$$

Isti primjer može se riješiti primjenom metode nekompatibilnih modova koja je opisana u prošlom poglavlju. U tom slučaju koristimo samo jedan nekompatibilni element.



Slika 3. Funkcija nekompatibilnih modova i njena derivacija za opisivanje diskontinuiteta u polju deformacija

Diskontinuitet u polju deformacija uzet je u obzir pomoću sljedeće funkcije $M(x)$, kao što je prikazano na slici 3.:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{L}, & x \in [0, \bar{x}] \\ \frac{2(x-L)}{L}, & x \in [\bar{x}, L] \end{cases} \tag{29}$$

Derivacija funkcije $M(x)$ jednaka je:

$$G(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{2}{L}, & x \in [0, \bar{x}] \\ \frac{2}{L}, & x \in [\bar{x}, L] \end{cases} \tag{30}$$

Jednadžbe (21) računaju se tako da podijelimo našu domenu Ω na dvije poddomene, $\Omega_1 \in [0, L/2]$ u kojoj je $E = E_1$ i $\Omega_2 \in [L/2, L]$ u kojoj je $E = E_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T E_1 \mathbf{A} \mathbf{B} dx + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{A} \mathbf{B} dx \\ \mathbf{F} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T E_1 \mathbf{A} \mathbf{G} dx + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{A} \mathbf{G} dx \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{G} E_1 \mathbf{A} \mathbf{G} dx + \int_{\Omega_2} \mathbf{G} E_2 \mathbf{A} \mathbf{G} dx \\ \mathbf{f}^T &= [F \quad 0] \end{aligned} \tag{31}$$

Uvođenjem funkcija oblika, (31) postaje:

$$\mathbf{K} = (E_1 + E_2) \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (E_1 - E_2) \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (31a)$$

$$\mathbf{H} = (E_1 + E_2) \frac{2A}{L}$$

iz čega se dobiva kondenzirana matrica krutosti definirana u jednadžbi (26):

$$\mathbf{K} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{2A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31b)$$

Nakon uzimanja u obzir rubnih uvjeta i vrijednosti geometrijskih i materijalnih parametara, rješavamo jednadžbu (27), iz čega se dobiva pomak slobodnog kraja štapa:

$$u(x=L) = 0.45 \quad (32)$$

Kako bismo izračunali pomak na mjestu diskontinuiteta, moramo najprije dobiti vrijednost parametra α . Primjenom jednadžbe (24) dobiva se:

$$\alpha = 0.075 \quad (33)$$

Pomak na mjestu diskontinuiteta sada se može izračunati iz jednadžbe (15):

$$u(x=L/2) = \mathbf{Nu} + M(x)\alpha = \frac{x}{L}u_2 - \frac{2x}{L}\alpha = 0.15 \quad (34)$$

Ovdje smo pokazali da se primjenom jednog nekompatibilnog konačnog elementa dobivaju isti rezultati kao i proračunom pomoću dva standardna konačna elementa, čiji su rezultati dani u (28).

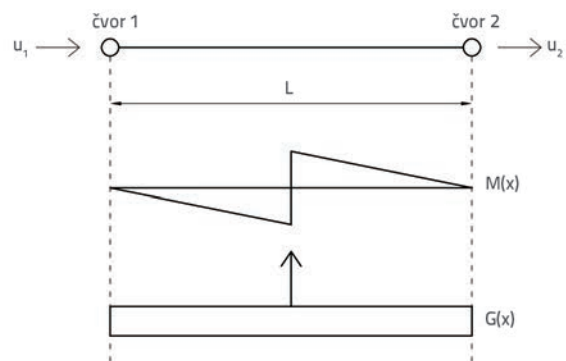
2.3.2. Diskontinuitet u polju pomaka za modeliranje lokaliziranog sloma

Ovdje je cilj predstaviti primjenu metode nekompatibilnih oblika na model oštećenja s omekšanjem koji može opisati slom betona u vlak. Kada je dostignuta granična čvrstoća, stvara se makropukotina, što znači da do omekšanja materijala dolazi odmah nakon elastične faze.

Ima nekoliko načina pomoću kojih se može uvesti omekšanje u model, a ovdje je odabran onaj prikazan u [7, 12]. U predloženom modelu, jaki diskontinuitet ugrađen je u element kao lokalizirani skok u polju pomaka koji simulira otvaranje pukotine na sredini elementa. Na ovaj način, eliminira se ovisnost rezultata o veličini mreže konačnih elemenata. Ima i drugih radova u kojima je omekšanje implementirano na sličan način, bilo za modele oštećenja, plastičnosti, ili kombinacije oštećenja i plastičnosti

[14-17]. Kod modela oštećenja, deformacija se vraća u nulu nakon potpunog rasterećenja, za razliku od modela plastičnosti, gdje se pojavljuje zaostala plastična deformacija. Formulacija će se izvesti za najjednostavniji 1D element. Diskontinuitet u polju pomaka mora biti uveden u kinematičke jednadžbe, a implementira se pomoću metode nekompatibilnih modova.

Za opisivanje otvaranja pukotine primjenjuje se parametar α koji modelira skok u polju pomaka na sredini elementa $\bar{x} = L/2$. Kako se ovdje radi o štapnom konačnom elementu koji ima samo osne stupnjeve slobode, može se opisati samo mod I otvaranja pukotine.



Slika 4. Funkcija nekompatibilnih modova i njena derivacija za modeliranje diskontinuiteta u polju pomaka

Lokalizacija se može uvesti u formulaciju metode konačnih elemenata pomoću metode nekompatibilnih modova, kao diskontinuitet u polju pomaka. U ovom slučaju biramo odgovarajuću funkciju $M(x)$ koja je prikazana na slici 4.:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{x}{L}, & x \in [0, \bar{x}] \\ 1 - \frac{x}{L}, & x \in (\bar{x}, L] \end{cases} \quad (35)$$

Derivacija funkcije $M(x)$ sada je jednaka:

$$G(x) = \tilde{G} + \delta_{\bar{x}} \quad (36)$$

gdje je $\tilde{G} = -1/L$, a $\delta_{\bar{x}}$ je Diracova delta-funkcija koja predstavlja singularni dio polja deformacija:

$$\delta_{\bar{x}} = \begin{cases} \infty, & x = \bar{x} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (37)$$

Uvođenjem aproksimacije za obogaćeno polje deformacija iz jednadžbe (16) u Hookeov zakon, dobiva se polje naprezanja u homogenom dijelu materijala koji je definiran na $[0, \bar{x} \cup \bar{x}, L]$, jer je $\delta_{\bar{x}} = 0$ za $x \neq \bar{x}$:

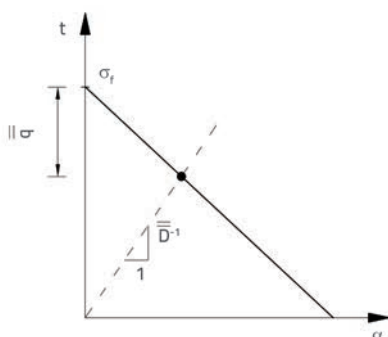
$$\sigma(x) = E(\mathbf{Bu} + \tilde{G}\alpha) \quad (38)$$

Kako je ponašanje na diskontinuitetu neelastično, uvodi se 1D model oštećenja s omekšanjem. Disipacija energije opisana je

kohezivnim zakonom ponašanja koji je prikazan na slici 5., a definiran je izrazom:

$$t = \bar{D}^{-1} \alpha \quad (39)$$

gdje je \bar{D} varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti od nula do beskonačno.



Slika 5. Kohezivni zakon ponašanja u diskontinuitetu

Funkcija oštećenja $\bar{\Phi}$ provjerava je li vrijednost sile u diskontinuitetu dopustiva ili nije:

$$\bar{\Phi} = |t| - (\sigma_f - \bar{q}) \leq 0 \quad (40)$$

U jednadžbi (40), σ_f je granica elastičnosti koja predstavlja naprezanje pri pojavi prvih pukotina, a \bar{q} je varijabla oštećenja koja je definirana kao:

$$\bar{q} = -\bar{K} \bar{\xi} \quad (41)$$

za linearni zakon omekšanja. Ovdje je \bar{K} modul omekšanja, a $\bar{\xi}$ je varijabla koja opisuje akumulaciju oštećenja.

Razvoj oštećenja može se opisati multiplikatorom oštećenja $\bar{\gamma}$ koji može poprimiti samo nenegativne vrijednosti. Jednadžbe razvoja oštećenja za unutarnje varijable modela navedene su ovdje:

$$\dot{\bar{D}} = \frac{\dot{\bar{\gamma}}}{t}; \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}}; \dot{\alpha} = \dot{\bar{\gamma}} \quad (42)$$

kao i kriteriji opterećenja i rasterećenja:

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0; \dot{\bar{\Phi}} \leq 0; \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\Phi}} = 0 \quad (43)$$

Uvjet konzistencije osigurava dopustivost naprezanja u svakom sljedećem vremenskom koraku:

$$\dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\Phi}} = 0 \quad (44)$$

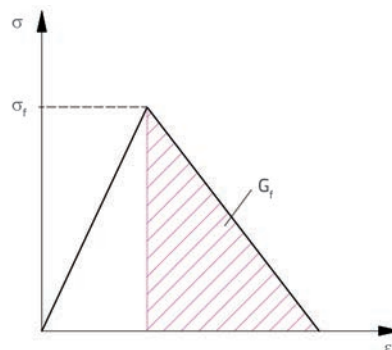
Zapravo, to znači da postoje dva prihvatljiva slučaja:

elastičnost: $\dot{\bar{\Phi}} < 0, \dot{\bar{\gamma}} = 0$

oštećenje: $\dot{\bar{\Phi}} = 0, \dot{\bar{\gamma}} > 0$

Energija loma G_f jednaka je površini ispod dijela kojim je opisano omekšanje materijala na dijagramu naprezanje-deformacija na slici 6., gdje je nagib pravca jednak modulu omekšanja \bar{K} :

$$\bar{K} = -\frac{\sigma_f^2}{2G_f} \quad (45)$$



Slika 6. Energija loma G_f

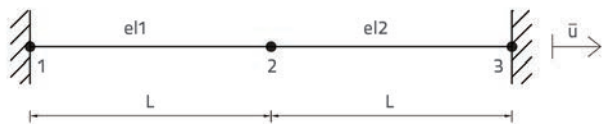
Numerička implementacija prikazanog modela prilično je zahtjevana, pa će ovdje biti dan samo kratki pregled. Detaljniji opis može se naći u [13].

Kako su jednadžbe razvoja oštećenja definirane lokalno, na razini elementa (u Gaussovoj integracijskoj točki), a jednadžbe ravnoteže definirane su globalno, za cijelu mrežu konačnih elemenata primijenit će se metodologija "operator split" [7] kako bi se omogućila efikasna računalna implementacija. Proračun je podijeljen u dvije faze: lokalnu fazu, gdje se rješavaju jednadžbe razvoja unutarnjih varijabli, i globalnu, gdje se rješavaju jednadžbe ravnoteže. Pomoću inkrementalne i iterativne Newton-Raphsonove metode dobiva se približno rješenje u svakom vremenskom koraku, a implicitna Eulerova metoda primjenjena je za integriranje jednadžbi razvoja oštećenja. Lokalna faza proračuna započinje probnim elastičnim korakom u kojoj se provjerava dopustivost sile u diskontinuitetu, kao što je prikazano u jednadžbi (40). Ako je $\bar{\Phi} \leq 0$, vrijednost sile je prihvatljiva i korak je zaista elastičan. Ako je $\bar{\Phi} > 0$, korak nije elastičan i mora se provesti korekcija zbog ulaska u fazu omekšanja. Tada se računa pozitivna vrijednost multiplikatora oštećenja $\bar{\gamma}$, i ažuriraju se vrijednosti varijabli oštećenja \bar{D} i $\bar{\xi}$ te pomaka u diskontinuitetu α . Nakon dobivanja konačnih vrijednosti unutarnjih varijabli, prelazi se u globalnu fazu proračuna.

U globalnoj fazi provjerava se jesu li jednadžbe ravnoteže zadovoljene unutar određene tolerancije greške, a ako nisu, provodi se još jedna iteracija kako bi se dobile nove vrijednosti čvornih pomaka. Sustav jednadžbi koji se rješava istog je oblika kao u (23), gdje su matrice \mathbf{K} , \mathbf{F} i \mathbf{H} definirane u (21), uz dodatak jednog člana u matrici \mathbf{H} koji je vezan uz silu u diskontinuitetu:

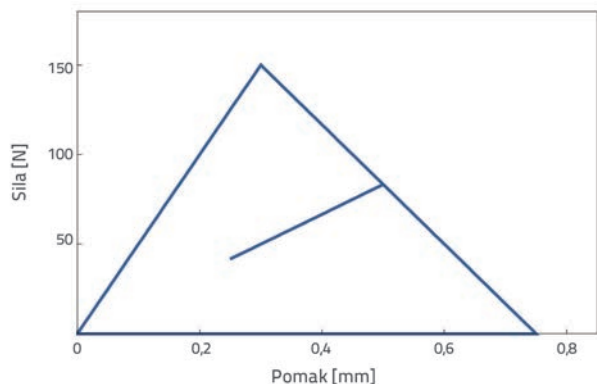
$$\mathbf{H} = \int_0^L \tilde{G} E A \tilde{G} dx + A \frac{\partial t}{\partial \alpha} \quad (46)$$

Za implementaciju i validaciju modela razvijen je računalni kod baziran na metodi konačnih elemenata u programima *Mathematica* [18] i *FEAP* [19]. Odabran je primjer štapa koji je ukliješten na lijevom kraju, s nametnutim pomakom \bar{u} na desnom kraju, kao što je prikazano na slici 7. Štap je modeliran s dva konačna elementa, gdje je kao materijalni model za prvi element odabran model oštećenja s omekšanjem, a za drugi element linearna elastičnost. Geometrijske i materijalne karakteristike korištene u ovom primjeru su sljedeće: $E = 1000$, $\sigma_f = 150$, $\bar{K} = -200$, $L = 1$ i $A = 1$. Nametnuti pomak na desnom kraju jednak je $\bar{u} = 0.75$.



Slika 7. Konzola s nametnutim pomakom

Globalni odgovor konstrukcije prikazan je na slici 8. Ponašanje je linearno elastično sve do dostizanja granice elastičnosti. Nakon toga dolazi do omekšanja materijala i počinje se otvarati pukotina na sredini prvog elementa. To znači da se pojavljuje koncentracija naprezanja u diskontinuitetu, dok se homogeni dio materijala rasterećuje. Ako rasteretimo konstrukciju, deformacija se na dijagramu vraća prema nuli, što je specifičnost ovakvih modela oštećenja. Može se zamijetiti da se opterećenje i rasterećenje odvijaju po istoj putanji te na kraju dolazi do potpunog sloma štapa, $\sigma = 0$.



Slika 8. Dijagram sila-pomak za dva ciklusa opterećenja i rasterećenja

3. Metoda nekompatibilnih modova u 2D i 3D

3.1. 2D konačni element

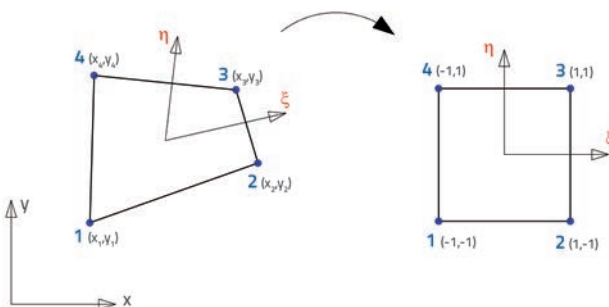
3.1.1. Formulacija Q4 elementa

Formulacija izoparametarskog četverokutnog 2D elementa dobro je poznata i može se naći u nekoj od mnogih radova vezanih uz metodu konačnih elemenata, npr. [4]. Geometrija elementa definirana je na sljedeći način:

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)x_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)x_i \quad (47)$$

$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)y_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)y_i$$

gdje su $\xi, \eta \in [-1, 1]$ izoparametarske koordinate, $N_i(\xi, \eta)$ su funkcije oblika, a x_i, y_i su koordinate čvorova, $i = (1, 2, 3, 4)$, kao što je prikazano na slici 9.



Slika 9. Izoparametarski Q4 element

Pomaci u i v interpoliraju se na sličan način:

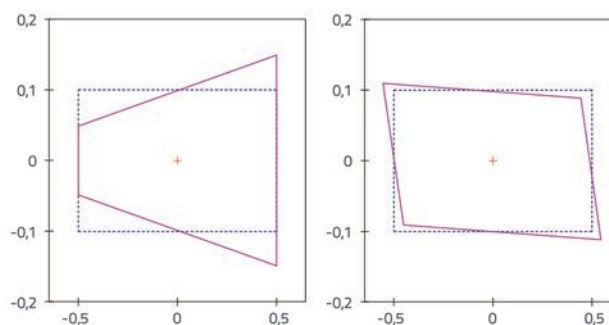
$$u(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)u_1 + N_2(\xi, \eta)u_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)u_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)u_i \quad (48)$$

$$v(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)v_1 + N_2(\xi, \eta)v_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)v_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)v_i$$

gdje u_i, v_i označavaju pomake u čvorovima, $i = (1, 2, 3, 4)$. Za izoparametarske konačne elemente, funkcije oblika za interpolaciju geometrije i pomaka jednake su. Funkcije oblika za izoparametarski četverokutni 2D element u matičnom obliku izgledaju ovako:

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (49)$$

Te funkcije oblika rezultiraju svojstvenim vektorima koji su prikazani na slici 10. (samo dva su prikazana, preostala dva su slična).



Slika 10. Svojstveni vektori Q4 elementa

Veza između deformacija i pomaka je uobičajena te za 2D slučaj ravninskog stanja napreznanja ili ravninskog stanja deformacija glasi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (50)$$

gdje je matrica **B** definirana kao

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}; i = 1, \dots, 4 \quad (51)$$

Funkcije oblika $N_i(\xi, \eta)$ ovise o izoparametarskim koordinatama ξ, η , a njihove derivacije dobivaju se primjenom lančanog pravila za deriviranje složenih funkcija

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (52)$$

gdje je **J** Jacobijeva matrica

$$\mathbf{J}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i x_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i y_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i x_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} [x_i \ y_i]; i = 1, \dots, 4 \quad (53)$$

Tražene parcijalne derivacije funkcija oblika po globalnim koordinatama su naposljetku

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Za slučaj malih deformacija i linearne elastičnosti može se primijeniti princip minimuma potencijalne energije, tako da se dobiju matrica krutosti elementa i konzistentni vektor vanjskog opterećenja

$$\mathbf{K} = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA; \mathbf{f} = t \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA \quad (55)$$

pa jednadžba ravnoteže glasi $\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$. U jednadžbi (55) t je debljina elementa, **D** je tenzor elastičnosti, a **q** je površinsko opterećenje. Napomena: u slučaju kada opterećenje ne djeluje na površini elementa, već na rubu, integral postaje linijski i matrica funkcija oblika **N** nije više puna.

Ako želimo transformirati navedene integrale u izoparametarske koordinate, potrebna je promjena varijabli

$$dA = |d\bar{\xi} \times d\bar{\eta}| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (56)$$

pa matrica krutosti sada postaje

$$\mathbf{K} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (57)$$

Integriranje se provodi numerički, primjenom Gaussove integracije. U tom slučaju integral se zamjenjuje sumom

$$\mathbf{K}_{el} = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (w_m w_n \det(\xi_m, \eta_n)_{el} \mathbf{B}^T(\xi_m, \eta_n)_{el} \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_m, \eta_n)_{el}) \quad (58)$$

$$\mathbf{P}_{el} = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (w_m w_n \det(\xi_m, \eta_n)_{el} \mathbf{N}^T(\xi_m, \eta_n)_{el} \mathbf{q}(\xi_m, \eta_n)_{el}) \quad (59)$$

gdje m, n predstavljaju broj točaka integracije duž svake izoparametarske koordinate unutar elementa, w_m, w_n su težinski koeficijenti, a ξ_m, η_n su koordinate Gaussovih točaka integracije.

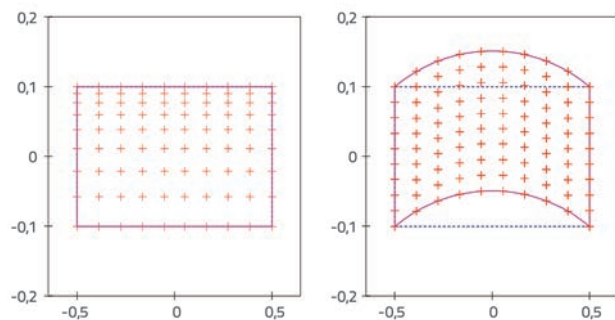
3.1.2. Uvođenje nekompatibilnih modova

Iz slike 10 vidljivo je da prikazani Q4 element ne može dobro opisati savijanje (kada se suprotne strane rotiraju uslijed savijanja, preostale dvije ostaju ravne, a ne zakrivljene). Tome će se pokušati doskočiti dodavanjem kvadratnih interpolacija pomaka koje ovaj element nema

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \mathbf{I} \\ N_j \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_j \mathbf{I} \\ M_j \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \alpha_j \end{bmatrix}; i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 2 \quad (60)$$

gdje su α_1, α_2 parametri nekompatibilnih modova koje treba odrediti, a funkcije M_j definirane su na sljedeći način: $M_1 = 1 - \xi^2$ i $M_2 = 1 - \eta^2$.

Pomaci u smjeru ξ koji odgovaraju novouvedenim funkcijama (nekompatibilnim modovima) prikazani su na slici 11., gdje crveni križići predstavljaju unutarnje točke elementa pa je vidljiva promjena u "gustoći".



Slika 11. Svojevistični vektori Q4 elementa nakon uvođenja nekompatibilnih modova

Matrica koja povezuje deformacije i pomake kod nekompatibilnih modova formulirana je na način da "patch"-test iz jednadžbe (19) bude zadovoljen pa matrica **G** za Q4 element ima sljedeći oblik

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_j}{\partial x} \\ \frac{\partial M_j}{\partial y} \\ \frac{\partial M_j}{\partial x} + \frac{\partial M_j}{\partial y} \end{bmatrix}; j = 1, \dots, 2 \quad (61)$$

Kompletna matrica **B** s dodatkom nekompatibilnih modova sada postaje $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B} \ \mathbf{G}]$, a matrica krutosti dobiva se na uobičajen način, samo se matrica **B** zamjenjuje matricom \mathbf{B}_m

$$\mathbf{K}_m = \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D} \mathbf{B}_m dA \quad (62)$$

Na sličan način moraju se proširiti i vektor čvornih pomaka **u** i vektor vanjskih sila **f** kako bi se uzeli u obzir parametri nekompatibilnih modova α , pa dobivamo

$$\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}; \mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (63)$$

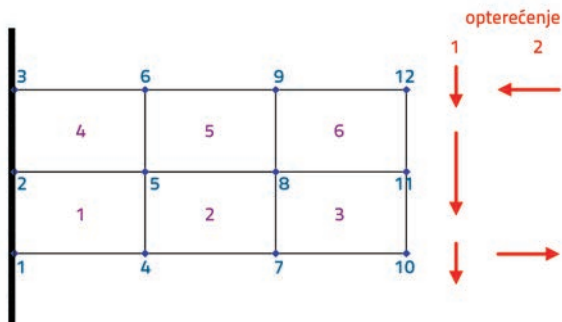
Sustav jednadžbi (23) sada postaje

$$\mathbf{K}_m \mathbf{u}_m = \mathbf{f}_m \quad (64)$$

Novi element koji je izveden ovdje naziva se Q6.

3.1.3. Primjer

Ponašanje novog Q6 elementa prikazat će se na primjeru konzole opterećene na savijanje. Na slici 12. vidljivo je da postoji opterećenje silom i momentom. Ovdje se radi o tankoj gredi (grafički prikaz nije proporcionalan), tako da se egzaktno rješenje može lako proračunati. Zadani su ulazni podaci: $E = 3E7$, $\nu = 0,33$ (Poissonov koeficijent), ravninsko stanje naprezanja, $L = 3,0$, $h = 0,2$ (odnos duljine i širine je 15). U tablici 1. je prikazana usporedba rezultata s nekompatibilnim modovima i bez njih

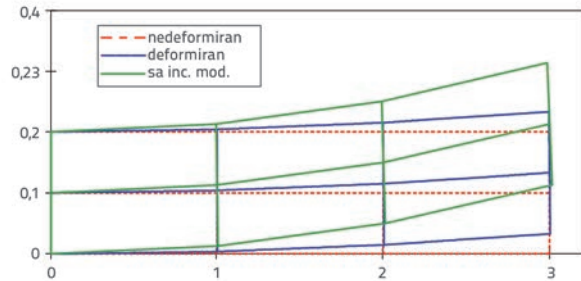
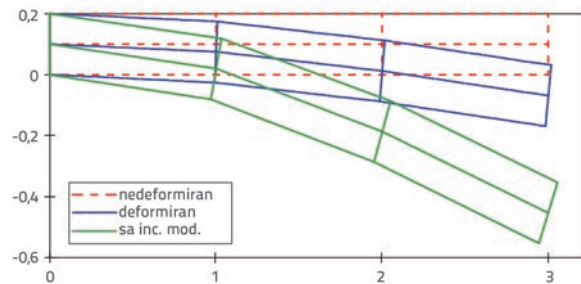


Slika 12. Konzola s prikazom opterećenja

Tablica 1. Usporedba rezultata za pomake u 2D

Pomaci	egzaktni	s NM	bez NM
Opterećenje 1	0,562	0,169	0,544
Opterećenje 2	0,112	0,033	0,113

Grafička usporedba proračuna pomoću standardnih i nekompatibilnih Q4 elemenata prikazana je na slici 13. Naprezanja u elementima s nekompatibilnim modovima dobivaju se na jednak način kao u standardnim elementima.



Slika 13. Usporedba pomaka uslijed opterećenja silom i momentom

3.2. 3D konačni element

3.2.1. Formulacija Q8 elementa

U načelu, Q8 element jednak je Q4 elementu, samo što mu je dodana treća dimenzija, tako da ima više stupnjeva slobode. Zbog toga će se formulacija Q8 elementa samo kratko predstaviti.

Izoparametarska aproksimacija za geometriju i pomake u elementu definirana je kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x}_i; \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_i; i = 1, \dots, 8 \quad (65)$$

gdje su funkcije oblika standardne izoparametarske funkcije (vidi [4]), tako da matrica **N** ima oblik

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i); \mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i, i = 1, \dots, 8 \quad (66)$$

gdje su ξ_i, η_i, ζ_i izoparametarske koordinate čvorova. Izrazi za matrice **B**, **K** i **f** slični su onima za Q4 element.

3.2.2. Uvođenje nekompatibilnih modova

Q8 element također ima problema s opisom savijanja, pa se zbog toga uvode nekompatibilni oblici kao kod Q4 elementa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_j \\ M_k \\ M_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \alpha_k \\ \alpha_l \end{bmatrix}; i = 1, \dots, 8; j = 1, 2, 3 \quad (67)$$

gdje su nekompatibilne funkcije oblika definirane na sljedeći način

$$M_1 = (1 - \xi^2); M_2 = (1 - \eta^2); M_3 = (1 - \zeta^2); \quad (68)$$

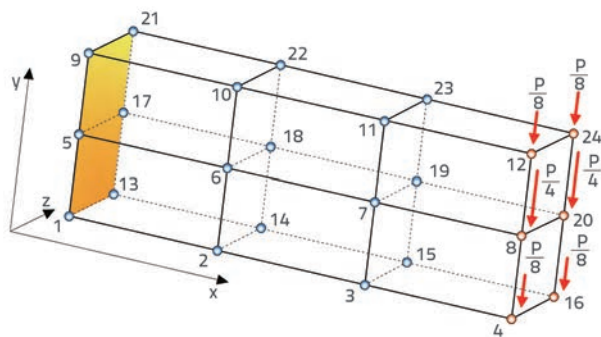
Matrica koja povezuje deformacije i pomake izgleda ovako: $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B} \ \mathbf{G}]$, gdje su matrice \mathbf{B} i \mathbf{G} za Q8 element dane kao

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}; \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_j}{\partial x} \\ \frac{\partial M_j}{\partial y} \\ \frac{\partial M_j}{\partial z} \end{bmatrix}; i = 1, \dots, 8; j = 1, 2, 3 \quad (69)$$

Krajnji sustav jednažbi formira se kao u (64).

3.2.3. Primjer

Analiza se provodi na primjeru prikazanom na slici 14, sa zadanim ulaznim podacima: $E = 3E7$, $\nu = 0,33$, ravninsko stanje naprezanja, $L = 3,0$, $h = 0,2$, $t = 0,1$. Ovo je ista konstrukcija kao u 2D primjeru za Q4 element pa je moguća usporedba rezultata. Rezultati proračuna prikazani su u tablici 2.



Slika 14. Primjer 3D konzole s prikazom opterećenja

Tablica 2. Usporedba rezultata za pomake u 3D

Pomaci	egzaktni	s NM	bez NM
Opterećenje 1	0,562	0,167	0,544
Opterećenje 2	0,112	0,033	0,112

Iz usporedbe s Q4 elementom vidljivo je da se za pomake uslijed opterećenja silom dobiva nešto manja točnost, a za pomake uslijed opterećenja momentom točnost je gotovo ista. Treba napomenuti da je Q8 element numerički mnogo zahtjevniji: matrica krutosti elementa ima dimenzije 24×24 , a uz dodatak nekompatibilnih modova (bez kondenzacije) dimenzije su 32×32 , što je prilično više u usporedbi s dimenzijama 8×8 i 12×12 za Q4 element.

4. Zaključak

U ovom radu dan je kratak pregled metode nekompatibilnih modova. Prikazana je njihova primjena unutar dva područja u kojima se često koriste: analizi sloma i poboljšanju ponašanja. U kontekstu analize sloma, pomoću nekompatibilnih oblika obogaćuje se u polje pomaka i deformacija kako bi se opisao slom unutar samog elementa. Postupak je prikazan za 1D element, za diskontinuitet u polju deformacija i u polju pomaka. U kontekstu poboljšanja ponašanja konačnih elemenata, nekompatibilni modovi koriste se za obogaćenje polja pomaka koje je opisano standardnim funkcijama oblika. Dodatne kvadratne funkcije oblika uvelike poboljšavaju ponašanje takvih elemenata u slučaju savijanja. Prikazani su primjeri u dvije i tri dimenzije. Pokazalo se da metoda nekompatibilnih oblika ima dobra svojstva u oba područja primjene te da njeno korištenje treba poticati. Dodatni stupnjevi slobode mogu se eliminirati pomoću statičke kondenzacije ili se njihov proračun može pojednostavniti uvođenjem postupka "operator split". Rezultati dobiveni primjenom nekompatibilnih modova imaju bolju točnost od onih dobivenih pomoću standardnih konačnih elemenata, odnosno usporedivi rezultati mogli bi se dobiti jedino uvođenjem mnogo većeg broja standardnih konačnih elemenata.

Zahvala

Izradu ovog rada financijski je poduprla Hrvatska zaklada za znanost preko projekta br. IP-2013-11-9068 "Multi-scale concrete model with parameter identification", te Francusko veleposlanstvo u Hrvatskoj preko stipendija francuske vlade za doktorsku razinu. Autori zahvaljuju na potpori.

LITERATURA

- [1] Wilson, E.L., Ibrahimbegovic, A.: Addition of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffness and stress, *Finite Elements In Analysis and Design*, 7 (1990), pp. 229-242, [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(90\)90034-C](https://doi.org/10.1016/0168-874X(90)90034-C)
- [2] Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J.: Incompatible displacement models, In Fenves, S.J., Perrone, N., Robinson, A.R., Schnobrich, C. (editors), *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, pp. 43-57, 1973, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-253250-4.50008-7>
- [3] Ibrahimbegovic, A., Wilson, E.L.: A modified method of incompatible modes, *Communications in Applied Numerical Methods*, 7 (1991), pp. 187-194, <https://doi.org/10.1002/cnm.1630070303>
- [4] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z.: *The finite element method: its basis and fundamentals*, 7th edition, Butterworth-Heinemann, 2013.
- [5] Simo, J.C., Rifai, M.S.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 (1990), pp. 1595-1638, <https://doi.org/10.1002/nme.1620290802>
- [6] Gharzeddine, F., Ibrahimbegovic, A.: Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity, *Computational Mechanics*, 24 (2000), pp.419-425, <https://doi.org/10.1007/s004660050001>
- [7] Ibrahimbegovic, A.: *Nonlinear solid mechanics, theoretical formulations and finite element solution methods*, Springer, 2009.
- [8] Ibrahimbegovic, A., Frey, F.: Geometrically nonlinear method of incompatible modes in application to finite elasticity with independent rotation field, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 (1993), pp. 4185-4200, <https://doi.org/10.1002/nme.1620362406>
- [9] Kozar, I., Ibrahimbegovic, A.: Finite element formulation of the finite rotation solid element, *Finite Elements in Analysis and Design*, 20 (1995) 2, pp. 101-126, [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(95\)00014-K](https://doi.org/10.1016/0168-874X(95)00014-K)
- [10] Fresl, K., Lazarević, D., Hak, S., Šavor Novak, M.: On the design of walls with openings, *GRAĐEVINAR*, 67 (2015) 2, pp. 103-121.
- [11] Washizu, K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*, 2nd edition, Pergamon Press, 1975.
- [12] Ibrahimbegovic, A., Melnyk, S.: Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh: an alternative to extended finite element method, *Computational Mechanics*, 40 (2007) 1, pp.149-155, <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0091-4>
- [13] Jukic, M., Brank, B., Ibrahimbegovic, A.: Failure analysis of reinforced concrete frames by beam finite element that combines damage, plasticity and embedded discontinuity, *Engineering Structures*, 75 (2014), pp. 507-527, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.06.017>
- [14] Brancherie, D.: *Modeles continus et discrets pour les problemes de localisation et de rupture fragile et ou ductile*, PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2003.
- [15] Dominguez, N., Brancherie, D., Davenne, L., Ibrahimbegovic, A.: Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforcement model, *Engineering Computations*, 22 (2005) 5-6, pp. 558-582, <https://doi.org/10.1108/02644400510603014>
- [16] Ibrahimbegovic, A., Boukertous, A., Davenne, L., Brancherie, D.: Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83 (2010) 4, pp. 452-481, <https://doi.org/10.1002/nme.2838>
- [17] Ibrahimbegovic, A., Brancherie, D.: Combined hardening and softening constitutive model of plasticity: precursor to shear slip line failure, *Computational Mechanics*, 31 (2003) 1-2, pp. 88-100, <https://doi.org/10.1007/s00466-002-0396-x>
- [18] Inc. Wolfram Research: *Mathematica*, 2015.
- [19] Taylor, R.L.: *FEAP - Finite Element Analysis Program*, 2014.