

Primljen / Received: 20.4.2012.

Ispravljen / Corrected: 4.9.2012.

Prihvaćen / Accepted: 2.10.2012.

Dostupno online / Available online: 15.11.2012.

Numerički model infiltracije vode u nesaturiranu sredinu

Autori:



Doc. dr. sc. **Vanja Travaš**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
vanjat@gradri.hr



Ivana Lanča, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
ivana.lanca@gradri.hr

Pregledni rad

[Vanja Travaš, Ivana Lanča](#)

Numerički model infiltracije vode u nesaturiranu sredinu

U radu je prikazan numerički model vertikalne infiltracije vode u nesaturirani sloj tla. Da bi se spoznala dinamika prelaska iz nesaturiranog u saturirano stanje pora tla, u radu se koristi stacionarni rubni uvjet konstantnog natapanja površine tla. Diskretizacija prostorne i vremenske domene toka je provedena metodom konačnih razlika. U svrhu izrade numeričkih analiza filtracijskog toka je provedena metodom konačnih razlika. U svrhu izrade numeričkih analiza filtracijskog toka, rezultirajući numerički algoritam je implementiran u programskom paketu *MathCAD 14*.

Ključne riječi:

Darcyjev zakon, nesaturirana porozna sredina, površinska infiltracija, redistribucijska krivulja, Richardsova jednačba, van Genuchtenov model

Subject review

[Vanja Travaš, Ivana Lanča](#)

Numerical model of water infiltration into unsaturated medium

The one-dimensional model of vertical infiltration of water into an unsaturated soil layer is presented in the paper. The stationary boundary condition of constant soil surface watering is used for analysing the dynamics of transition from the unsaturated to saturated state of soil pores. The discretisation of the space and time domain of flow is conducted using the finite difference method. The resulting numerical algorithm is included in the program package *MathCAD 14* to enable numerical analysis of filtration flow rate.

Key words:

Darcy's law, unsaturated porous medium, surface infiltration, redistribution curve, Richards equation, van Genuchten model

Übersichtsarbeit

[Vanja Travaš, Ivana Lanča](#)

Numerisches Modell der Wasserinfiltration in nicht saturiertes Milieu

In der Arbeit wird ein numerisches 1D-Modell der vertikalen Wasserinfiltration in eine nichtsatürierte Bodenschicht dargestellt. Zum Zwecke der Betrachtung der Transitionsdynamik vom nicht saturierten zum saturierten Zustand der Bodenporen wird in der Arbeit die feststehende Randbedingung einer konstanten Berieselung der Bodenoberfläche verwendet. Die Diskretisierung der Zeit- und Raumdomäne des Flusses geschieht mithilfe der Finite-Differenzen-Methode. Zum Zwecke der Erstellung einer numerischen Analyse des Filtrationsverlaufs wird der sich ergebende numerische Algorithmus in das Programmpaket *MathCAD 14* importiert.

Schlüsselwörter:

Darcy-Gesetz, nicht saturiertes, poröses Milieu, Oberflächeninfiltrierung, Redistributionskurve, Richards-Gleichung, Van-Genuchten-Modell

1. Uvod

S obzirom na količinu kapljevine u porama neke intergranularne sredine, filtracijski tokovi se mogu odvijati kroz saturirana i nesaturirana porozna tijela. U hidrotehničkoj praksi ulogu kapljevine ima najčešće voda, a porozne sredine tlo. Pritom, u svrhu izrade analiza od praktičnog značenja, kako u ovom radu pa tako i inače, usvaja se pretpostavka da se gibanje vode u porama tla može promatrati "kroz" *hipotezu kontinuuma*, tj. da je poroznost tla takva da se za nju može definirati reprezentativni elementarni volumen [1].

U slučaju da su pore tla potpuno ispunjene vodom, sadržana voda tvori kontinuiranu cjelinu. U takvim okolnostima se poremećaj u polju tlaka prenosi kroz prostor zauzet vodom. Drugim riječima, razlika u razinama sadržane vode prouzročit će njeno pokretanje. Opisivanje takvog filtracijskog toka ulazi u osnovnu izobrazbu hidrotehničkih inženjera, te se bazira na pretpostavci da se veličina prisutnih vrtložnih gibanja može zanemariti u odnosu na veličinu cijele domene toka. Navedeno opravdava upotrebu teorije potencijalnog strujanja, te se na taj način modeliranje filtracijskog toka u saturiranim sredinama svodi na rješavanje Laplaceove ili Poissonove diferencijalne jednačine. Izbor jednačine ovisi o tome da li se parametri toka mijenjaju u vrijeme njegova utvrđivanja [2].

U nesaturiranim poroznim sredinama se tok vode odvija kroz prostor koji je potpuno ili djelomično ispunjen nekim plinom. Za strujanje vode kroz pore tla, sadržani plin je uvijek redovito zrak. Za definiranje dinamike ispunjavanja pora tla vodom potrebno je kvantificirati količinu sadržane vode. U tu svrhu se koristi *stupanj saturacije* θ , definiran omjerom volumena vode i volumena porozne sredine (1):

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{V_{\text{vode}}}{V_{\text{sredine}}} \quad (1)$$

Teorijski raspon stupnja saturacije θ može biti od nule (što odgovara potpuno isušenoj poroznoj sredini) do *potpunog stupnja saturacije* θ_s koji definira stanje tla u kojem su sve pore zauzete vodom. Pritom treba napomenuti da u praktičnim slučajevima nije moguće naići na potpuno isušeno tlo za koje je $\theta = 0$. Naime, zbog relativno jakih molekularnih sila između stijenka čestica tla i vode, u tlu se uvijek nalazi stanovita količina vode prilijepljena za čestice tla. Ta količina vode može bitno utjecati na dinamiku ispunjavanja pora nesaturirane sredine te se u tu svrhu treba svakako uzeti u obzir. Stupanj saturacije kojem odgovara spomenuta količina vode se naziva *rezidualni stupanj saturacije* θ_r [3] te je za tlo najčešće u granicama od 0.001 do 0.02.

Lako je razumljivo da svakoj saturiranoj sredini prethodit stanovito vrijeme provedeno u nesaturiranom stanju. U skladu sa navedenim, važnost opisivanja nesaturiranih filtracijskih tokova slijedi iz projektnih zadataka u kojima je

potrebno definirati dinamiku prelaska između saturiranog i nesaturiranog stanja tla (i obrnuto). Klasičan je primjer za to strujanje vode kroz nasip izgrađen radi obrane od poplava [2]. Osim navedenog, lako je uočiti praktičnu važnost modeliranja nesaturiranih tokova u svrhu izrade projekata hidrotehničkih melioracija. Pritom, za razliku od navedenog, treba primijetiti da se takav filtracijski tok zbiva u smjeru sile teže, i to kroz geološke naslage tla koje su najčešće međusobno paralelne i ujedno okomite na tok vode. Naime takvi se uvjeti gotovo uvijek susreću u relativno plitkim pedološkim horizontima unutar kojih se nastoje osigurati prikladni uvjeti za prihranjivanje korijena različitih poljoprivrednih kultura. Na taj način, te za razliku od navedenog primjera strujanja kroz nasip (u kojem zakrivljeno vodeno lice odaje prisutnost vertikalne i horizontalne komponente brzine), proces inicijacije natapanja poljoprivrednih površina se najčešće opisuje kao 1D filtracijski tok.

Rad prikazuje numerički model redistribucije saturiranosti u tlu, nastale kao rezultat konstantnog natapanja površine tla. Rezultat modela je skalarna funkcija $\theta(z, t)$ u kojoj su nezavisne varijable: vertikalna koordinata vodonosnika z i vrijeme t proteklo od trenutka inicijacije natapanja. Ova funkcija je u literaturi poznata kao *redistribucijska krivulja* [4].

2. Konstitutivni model tla

Kako je za filtracijski tok u tlu karakteristična mala brzina strujanja v_s , iz inženjerske perspektive je opravdano zanemariti doprinos kinetičke energije ukupnoj energiji vode. Na taj način, piezometarski potencijal H se može definirati u obliku

$$H = z + \frac{p}{\rho g} \quad (2)$$

gdje je z geodetska kota čestice vode od referentne ravnine, g ubrzanje sile teže, ρ gustoća fluida, p tlak i omjer $p/\rho g$ pripadajuća piezometarska tlačna visina h . U navedenim okolnostima se brzina strujanja v_s u poroznom elementu dužine dl može dovesti u vezu s razlikom potencijala dH na njegovim rubovima. Ova zavisnost se definira Darcyjevim zakonom

$$v_d = k_s \frac{dH}{dl} \quad (3)$$

u kojem je v_d Darcyjeva brzina procjeđivanja i k_s *saturirani koeficijent filtracije* dimenzije [L/T]. Poznavajući efektivnu poroznost materijala, može se uspostaviti linearna veza između v_d i v_s [5].

Opisivanje filtracije u nesaturiranim sredinama iziskuje definiranje funkcijske zavisnosti između koeficijenta filtracije k (tj. mjere protočne moći porozne sredine) i količine vode u porama materijala (θ). Naime, u slučaju da su sve pore

ispunjene vodom ($\theta = \theta_s$), koeficijent k postaje jednak koeficijentu k_s . Za sve ostale slučajeve, tj. slučajeve u kojima je $\theta < \theta_s$, potrebno je definirati nelinearnu zavisnost između θ i k . Za provedbu numeričke analize infiltracije vode u tlo, u radu se koristi van Genuchtenov model [6, 7, 8, 9]. Model se bazira na generaliziranom Darcyjevom zakonu

$$v_\sigma = k(\theta) \nabla H \quad ; \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4)$$

te definira nelinearnu funkcijsku zavisnost $k(\theta)$. Kako koeficijent filtracije $k(\theta)$ može biti u rasponu od nule do vrijednosti k_s , uvodi se normalizacija u obliku

$$k(\theta) = k_r(S) k_s \quad ; \quad 0 \leq k_r \leq 1 \quad (5)$$

u kojoj je k_r relativni koeficijent filtracije ovisan o relativnom stupnju saturiranosti S (6).

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad ; \quad 0 \leq S \leq 1 \quad (6)$$

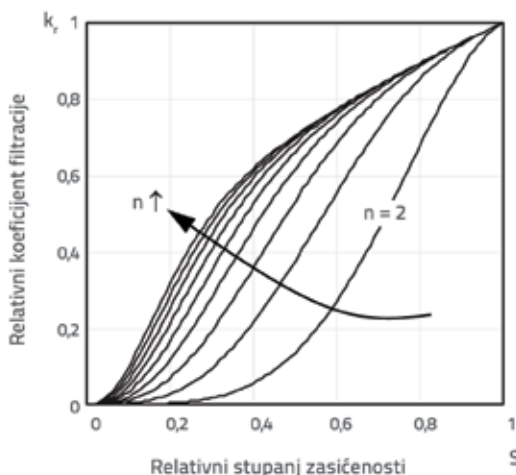
Konstitutivno modeliranje tla se sada svodi na prikladno definiranje funkcije $k_r(S)$. U tu svrhu van Genuchten predlaže [9]:

$$k_r(S) = \sqrt{S} \left[1 - \left(1 - S^{\frac{1}{m}} \right)^n \right]^2 \quad (7)$$

gdje su m i n bezdimenzijski empirijski parametri tla, međusobno konjugirani jednačinom

$$m = 1 - (1/n) \quad \text{za} \quad n > 1 \quad (8)$$

Iako je teško interpretirati pravi fizikalni značaj parametra n , ova bezdimenzijska veličina se često tumači kao kalibracijski parametar kojim se opisuje distribucija veličine pora u granularnoj sredini. Naime, Guber i ostali [6] su pokazali da n korelira s volumnim udjelom agregata relativno male frakcije.



Slika 1. Porast koeficijenta k_r s porastom koeficijenta S (van Genuchtenov konstitutivni model)

Kako bi se ilustrirao utjecaj parametra n na propusnu moć porozne sredine, slika 1. prikazuje nekoliko krivulja definiranih jednačinom (7), dobivenih za parametra n u rasponu od 2 do 10 (korak $\Delta n=1$).

Važno je napomenuti da konstitutivni model (7) vrijedi samo u slučaju kada se saturacija porozne sredine progresivno povećava u vremenu; ili pak stagnira oko neke postignute vrijednosti. Naime, eksperimenti su pokazali da postoji histereza u konstitutivnoj vezi (7) [10]. U slučaju da u nekoj točki porozne sredine koeficijent S (6) počinje opadati, popratno opadanje koeficijenta filtracije k_r nije definirano istim konstitutivnim zakonom (7).

Modeliranje histereze je potrebno u slučaju kada se unutar razmatranog vremenskog intervala očekuje natapanje i isušivanje tla (ili obrnuto ili pak ciklus navedenih stanja). U slučaju da se natapanje tla odvija s konstantnim intenzitetom, kao što je slučaj u ovom radu, modeliranje histereze nije potrebno.

3. Model toka kroz nesaturiranu sredinu

Diferencijalna jednačina filtracijskih tokova kroz nesaturirana porozna tijela se izvodi iz jednačine kontinuiteta napisane za kontrolni volumen unutar porozne sredine. Pritom, kako se prostor takvog kontrolnog volumena ne može u potpunosti ispuniti vodom, količinu prisutne vode treba izraziti stupnjem saturacije θ (1). Za slučaj da nema izvora i ponora unutar kontrolnog volumena V , vremenska će promjena sadržane mase vode biti jednaka razlici protoka mase kroz površinu oplošja kontrolnog volumena A u tom istom vremenu. Na taj način, ako svaki diferencijalni element dA površine A ima pripadnu vanjsku normalu \mathbf{n} , jednačina kontinuiteta se može napisati u obliku [11].

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \theta dV = \int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (9)$$

Koristeći Gaussov teorem, desna strana jednačine (9) poprima oblik

$$\int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_V \nabla \cdot \rho \vec{v} dV \quad (10)$$

te kako je opravdano okarakterizirati razmatrani tok tekućine kao nestišljivi, jednačina (10) se može napisati u obliku

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (11)$$

Koristeći Darcyjev zakon (4), prethodna jednačina poprima oblik

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [k(\theta) \nabla H] \quad (12)$$

te ako se piezometarski potencijal H napiše u obliku definiranim jednačinom (2), slijedi da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (13)$$

Jednadžba (13) je poznata kao *Richardsova jednadžba* i predstavlja osnovnu diferencijalnu jednadžbu za tok vode kroz nesaturiranu poroznu sredinu. Kako je dosad pronađeno samo nekoliko analitičkih rješenja Richardsove jednadžbe, te kako su dobivena rješenja malog praktičnog značenja, jednadžba (13) se uvijek rješava numeričkim "putem".

Definirajući funkciju $k(\theta)$, jednadžba (13) sadrži dvije nepoznanice, i to nepoznato polje saturacije θ i polje tlačne visine h . U takvim okolnostima jednadžbu (13) nije moguće jednoznačno riješiti. U tu svrhu se uvode nove konstitutivne veze te se na taj način jednadžba (13) može preformulirati u tri različita oblika. Prikazani oblik (13) je u literaturi poznat kao *m oblik Richardsove jednadžbe* i nije pogodan za definiranje rubnih uvjeta konstantnog natapanja površine tla [7]. Iz tog razloga se uvodi drugi oblik jednadžbe, i to putem diferencijalne veze

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (14)$$

uz pomoć koje se (13) može prikazati u obliku

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (15)$$

U jednadžbi (15) član $dh/d\theta$ definira jediničnu promjenu tlačne visine vode nastalu uslijed istodobne promjene stupnja saturacije θ . Drugim riječima, član $dh/d\theta$ predstavlja recipročnu vrijednost uskladištenja porozne sredine $C(h)$. Sukladno navedenom, (15) se može napisati u obliku

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{C(h)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (16)$$

gdje je

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh} \quad (17)$$

Budući da (17) opisuje stanovito mehaničko svojstvo tla (koje se može kvantificirati laboratorijskim putem), poznavanje funkcije $C(h)$ će rezultirati opadanjem broja nepoznanica u (15) te se na taj način definira jednoznačno rješenje problema infiltracije. Jednadžba (16) je u literaturi poznata kao *h oblik Richardsove jednadžbe* [12]. U slučaju da se filtracijski tok opisuje ovom jednadžbom, dobro je primijetiti da rubni uvjet konstantnog natapanja površine tla treba definirati u obliku piezometarske tlačne visine h . U tu svrhu je potrebno poznavati funkciju $h(\theta)$. Pritom se rubni uvjet konstantnog natapanja površine tla može jednostavnije definirati (tj. intuitivnije) zadavanjem stupnja saturacije kao rubni uvjet. Naime, za vrijeme $t > t_0$ rubni će uvjet $\theta = \theta_s$ na površini tla definirati stanje konstantnog natapanja. Kako bi se u tu svrhu dobio prikladan oblik jednadžbe (13), uvodi se jednakost (18):

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{C(h)} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (18)$$

uz pomoć koje se *h oblik Richardsove jednadžbe* (16) može preformulirati u oblik

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \left(\frac{1}{C(h)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (19)$$

Sređivanjem jednadžbe (19) slijedi da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k(\theta)}{C(h)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(\theta) \right) \quad (20)$$

gdje se omjer $k(\theta)/C(h)$ najčešće interpretira kao *kapilarna difuzija D* (21):

$$D(\theta) = \frac{k(\theta)}{C(h)} \quad (21)$$

Kako kapilarna difuzija *D* eksplicitno ovisi o stupnju saturacije porozne sredine θ [13], jednadžba (20) se može svesti na oblik

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad (22)$$

Uz definirane konstitutivne veze (7) i (21) može se jednadžba (22) riješiti po θ . Pritom treba primijetiti da se u tom slučaju i rubni uvjeti definiraju zadavanjem veličine θ . Drugim riječima, ovaj posljednji oblik Richardsove jednadžbe (13) je najpogodniji za modeliranje vremenske i prostorne promjene stupnja saturacije pri konstantnom natapanju površine tla. Dobro je primijetiti da će za neki ostvareni stupanj saturacije θ jednadžba (17) definirati derivaciju u točki krivulje retencije tla. Približavajući se potpunom stupnju saturacije θ_s , omjer (17) će se približavati nuli. U trenutku kada se ostvari potpuna saturacija tla, $C(h)$ postaje jednak nuli. Kako slijedi iz (21), spomenuta tendencija će uvelike utjecati na kapilarnu difuziju *D*. Štoviše, u trenutku kada su pore tla potpuno ispunjene vodom, difuzija postaje neodređena (dijeljenje s nulom).

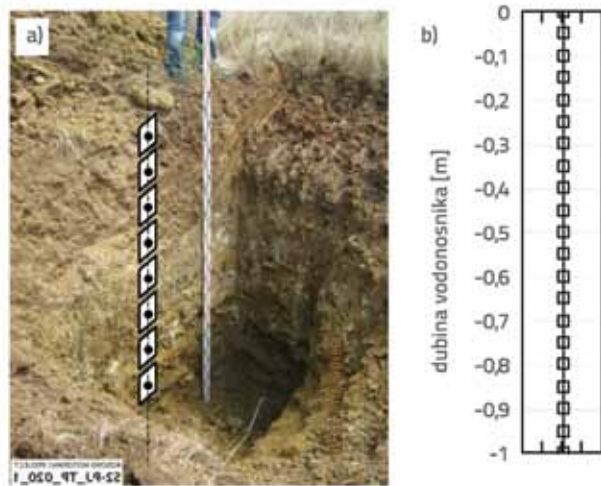
Prilikom numeričkog rješavanja θ oblika *Richardsove jednadžbe* (22) navedeni se problem evidentira već mnogo ranije, tj. prije nego se dosegne stupanj potpune saturacije tla θ_s . Iz tog razloga, a i zato što se u radu razmatra rubni uvjet konstantnog natapanja (definiranog sa θ_s), kapilarna difuzija *D* se usvaja kao konstantan mehanički parametar [14]. Na taj način kapilarna difuzija *D* u (22) se može izlučiti ispred diferencijalnog operatora, čime se uspostavlja jednakost

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} + k(\theta) \right) \quad (23)$$

Numerički algoritam koji je implementiran u višem programskom jeziku *MathCAD 14* te služi pri izradi numeričke analize infiltracije vode u sloj tla, bazira se na numeričkoj aproksimaciji rješenja jednadžbe (23).

4. Diskretizacija osnovne jednadžbe procesa

Diskretizacija prostorne domene toka se provodi od površine tla, gdje je $z = 0$ (slika 2.), do neke unaprijed definirane dubine vodonosnog sloja. Prostorni korak Δz se usvaja konstantnim. Na taj je način prostorni položaj zanimljivih varijabli definiran koordinatom i , a njihov se vremenski položaj definira koordinatom j .



Slika 2. a) Profil tla; b) primjer diskretizacije prostora između površine tla i nekog propusnog pedološkog horizonta

U skladu s uvedenim oznakama, numerička aproksimacija parcijalne derivacije neke fizikalne veličine po prostornoj koordinati z poprima oblik

$$\frac{\partial''}{\partial z} \approx \frac{\theta''_{i+1} - \theta''_i}{\Delta z} \tag{24}$$

a parcijalna derivacija iste veličine u vremenu postaje

$$\frac{\partial''}{\partial t} \approx \frac{\theta''_{i+1} - \theta''_i}{\Delta t} \tag{25}$$

Treba primijetiti da numerička diskretizacija jednadžbe (22) zahtijeva i aproksimaciju druge derivacije stupnja saturacije θ . Naime, desna strana jednadžbe (22) sadrži član

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] \tag{26}$$

Koristeći aproksimaciju prostorne derivacije (24), druga derivacija stupnja saturacije θ se može analogno aproksimirati u obliku

$$\frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{\theta''_{i+1} - \theta''_i}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\theta''_i - \theta''_{i-1}}{\Delta z} \right) \right] \tag{27}$$

Numerička aproksimacija će zahtijevati i aproksimaciju prostorne derivacije funkcije $k(\theta)$ u (22). Pritom, kako se $k(\theta)$ može interpretirati kao mjera vodopropusnosti između dva susjedna sloja tla, numerička aproksimacija se najčešće

provodi na nešto drugačiji način od one definirane sa (24). Drugim riječima, kako bi se modelirala vodopropusnost između susjednih slojeva u okolini diskretizacijske točke i , koeficijent filtracije $k(\theta)$ se definira na polovici prostornog inkrementa Δz , i to kao srednja vrijednost susjednih veličina $k(\theta)_{i-1}$ i $k(\theta)_i$. Prostorna promjena veličine $k(\theta)$ u točki i se definira uz pomoć vrijednosti

$$k \left(\theta \right)_{i+\frac{1}{2}}^j = \frac{k \left(\theta \right)_{i+1}^j + k \left(\theta \right)_i^j}{2} \tag{28}$$

te vrijednosti

$$k \left(\theta \right)_{i-\frac{1}{2}}^j = \frac{k \left(\theta \right)_i^j + k \left(\theta \right)_{i-1}^j}{2} \tag{29}$$

pa se derivacija $\partial k(\theta_s) / \partial z$ u (22) aproksimira veličinom

$$\frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \Big|_i \approx \frac{k \left(\theta \right)_{i+\frac{1}{2}}^j - k \left(\theta \right)_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta z} \tag{30}$$

Ako je promatrani segment tla nehomogen, numerička aproksimacija jednadžbe (22) se provodi na način da se svakom pojedinom čvoru i definira pripadajuća vrijednost k_s . Za razliku od navedenog, modeliranje anizotropije je daleko od trivijalnog [15]. Kako se unutar rada razmatra jednodimenzijski vertikalni tok, modeliranje anizotropije gubi svako značenje (jer postoji samo jedna komponenta brzine).

Koristeći aproksimacije derivacija (24, 25, 27, 30), jednadžba (22) se može diskretizirati, te se nakon sređivanja nastalih članova definira sažet numerički algoritam u obliku

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta z} \left(\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j \right) + \frac{k \left(\theta \right)_{i+\frac{1}{2}}^j - k \left(\theta \right)_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta z} \tag{31}$$

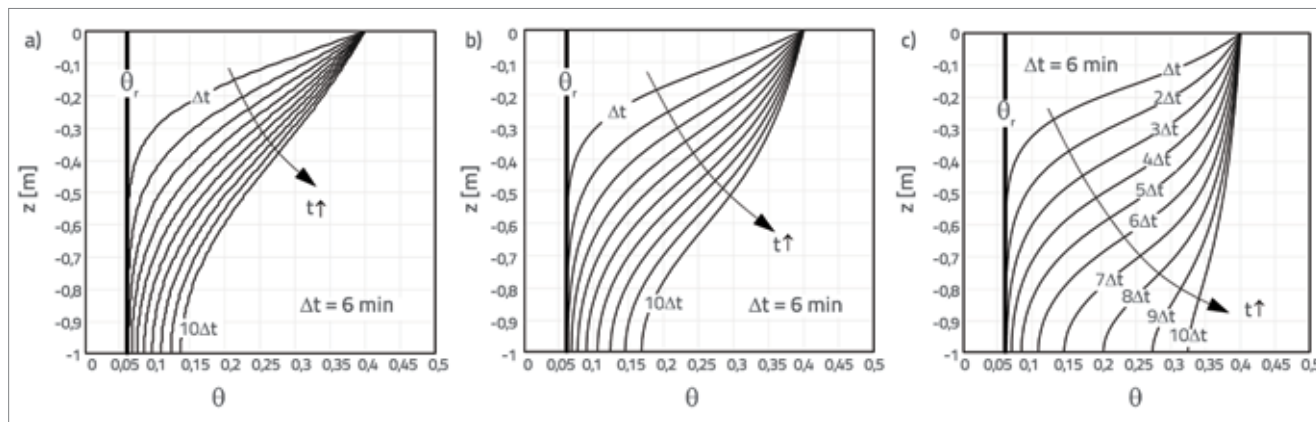
Za poznato stanje u vremenu j , u svakoj točki i jednadžba (31) definira θ u narednom vremenskom stanju $j+1$. Pritom, kako je θ^{*1} jedina nepoznanica u (31), dobiveni sustav jednadžbi je eksplicitan u vremenu te ga to čini vrlo atraktivnim za računalnu implementaciju. Kao i svaki eksplicitni numerički algoritam, i ovaj je podložan kriterijima numeričke stabilnosti. Drugim riječima, za odabrani prostorni korak Δz , vremenski korak Δt mora zadovoljiti nejednakost

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta z)^2}{D} \delta \quad ; \quad \delta < 1 \tag{32}$$

u kojoj je θ stabilizacijski parametar.

5. Numerička analiza

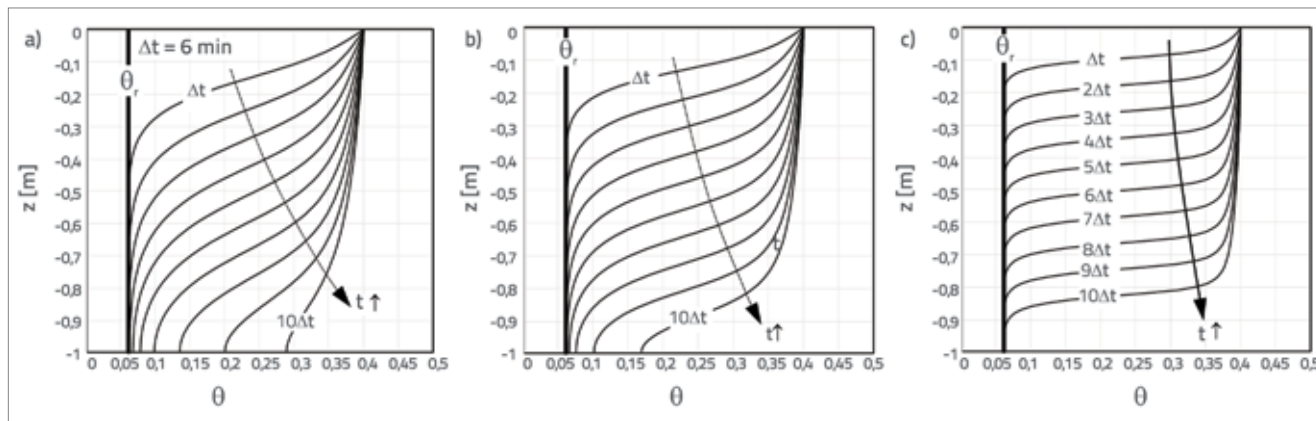
Prikazani numerički algoritam se koristio za analizu površinske infiltracije vode u homogeni sloj tla. Od površine tla na koti $z=0$,



Slika 3. Redistribucijske krivulje: a) $k_s=1.5 \times 10^{-5}$ m/s; b) $k_s=3.75 \times 10^{-5}$ m/s; c) $k_s=7.5 \times 10^{-5}$ m/s

sve do dubine $z = -1$ m, provedena je ekvidistantna prostorna diskretizacija sa 200 točaka. Razdoblje unutar kojeg se modelira redistribucija saturacije iznosi jedan sat. Kako bi se prikazala dinamika razvoja saturacije, grafički prikazi sadrže više θ krivulja, i to za vremenska stanja $j\Delta t$ gdje je $j = 1..10$. Numerička analiza se provodi za tlo s karakteristikama: $k_s = 1.5 \times 10^{-5}$ m/s, $\theta_r = 0,06$ cm³/cm³, $\theta_s = 0,4$ cm³/cm³, $D = 5 \times 10^{-5}$ m²/s i $n = 2$. Ovakav izbor parametra tla nije slučajna već je odabran s razlogom jer definiira tlo koje se može opravdano kategorizirati kao ilovača [16]; a ona je s obzirom na količinu humusa i hranjivih tvari vrlo pogodna za uzgoj različitih poljoprivrednih kultura. Pritom, kako bi se analizirao utjecaj koeficijenta k_s na dinamiku razvoja polja θ , inicijalna vrijednost k_s se u dva navrata povećavala za $\Delta k_s = 2.25 \times 10^{-5}$ m/s (faktor uvećanja je 2.5). Ne mijenjajući ostale konstitutivne parametre tla, ispitani raspon koeficijenta k_s se može interpretirati kao pokušaj opisivanja pojave pukotina u tlu nastalih uslijed dužeg perioda suše. Naime, u tom slučaju će razvoj manjih ali i većih pukotina u tlu utjecati na povećanje vodopropusnost tla. S druge strane, budući da se proces infiltracije ovdje modelira u okviru hipoteze kontinuuma, na makroskopskoj će se razini promatranja to odraziti jedino na uvećanje vrijednosti koeficijenta k_s . Nadalje, radi definiranja konstantnog natapanja površine tla, u čvoru $i = 1$ se definirao Dirichletov rubni uvjet sa

$\theta = \theta_s = 0,4$ cm³/cm³. Kako je usvojeno da prostorna diskretizacija završava na propusnoj granici tla, u zadnjem čvoru je definiran uvjet vodopropusnosti $\theta_n = \theta_{n-1}$ (zero gradient boundary condition). Rezultati numeričke analize su prikazani na slici 3. U svim primjerima vertikalna linija označava početni uvjet $\theta = \theta_r = 0,06$ cm³/cm³, tj. polje θ u trenutku t_0 . Porastom vrijednosti k_s raste i upojna moć porozne sredine. Naime, kako je prikazano na slici 3c, u vremenu $10\Delta t$ je redistribucijska krivulja gotovo vertikalna te na taj način upućuje na činjenicu da su tada sve pore tla saturirane ili bliske potpunoj saturaciji. Za razliku od navedenog (tj. za manji k_s), slika 3a ilustrira zakrivljenu krivulju $\theta(z, 10\Delta t)$, koja za isto vrijeme na dnu domene doseže saturaciju od tek $\theta = 0,14$. Zanimljivo je upozoriti i na mehanizam propagacije vode u slučaju da je kapilarna difuzija D manja od prethodno usvojene. Kako bi se evidentirao utjecaj veličine D na dinamiku razvoja polja $\theta(z, t)$, provedena je numerička analiza za tri različite vrijednosti D . Osim kapilarne difuzijai D , koja je u tri navrata sukcesivno reducirana za inkrement $\Delta D = 1,5 \times 10^{-5}$ m²/s, svi ostali parametri ostaju konstantni i odgovaraju zadnjem slučaju prethodno prikazane numeričke analize (slika 3.c). U nastavku su prikazani rezultati numeričke analize provedene za slučajeve da kapilarna difuzijai D poprimi vrijednost: 2.5×10^{-6} , 1.25×10^{-5} i 2.5×10^{-5} m²/s (slika 4.).



Slika 4. Redistribucijske krivulje a) $D=3.5 \times 10^{-5}$ m²/s; b) $D=2.0 \times 10^{-5}$ m²/s; c) $D=5.0 \times 10^{-6}$ m²/s

Kako je prikazano na slici 4c, za relativno malu vrijednost kapilarne difuzijai D , u relativno tankom sloju domene toka se segment redistribucijske krivulje $\theta(z,t)$ oblikuje gotovo horizontalno. Drugim riječima, jasno se pokazuje horizontalna granica između saturirane i nesaturirane sredine (*vodena fronta*). Treba primijetiti i to da je u slučaju sa slike 4.c dinamika redistribucijske krivulje definirana samo njezinom translacijom u vremenu. Naime, oblik redistribucijske krivulje se za usvojene parametre toka ne mijenja u vremenu, već se mijenja samo položaj *vodene fronte*. S druge strane, povećavajući vrijednost kapilarne difuzijai D , slike 4.a i 4.b prikazuju doprinos kapilarne difuzijai D na promjenu oblika redistribucijske krivulje, i to posebno u kasnijim vremenskim intervalima. U vremenu unutar kojeg započinje infiltracija vode, numerički model upućuje i na neznatan utjecaj vrijednosti k_s na promjenu oblika i položaja redistribucijske krivulje.

Za usvojene parametre toka, to vrijeme iznosi oko 10 min ($\sim 2\Delta t$). Naime, kako je prikazano na slici 3., neovisno o veličini k_s , u vremenu Δt su razlike između svih redistribucijskih krivulja $\theta(z,\Delta t)$ neznatne, tj. gotovo neprimjetne. Razlike između krivulja počinju biti evidentne tek nakon vremena od približno $2\Delta t$ (slika 3.). Ovakva dinamika razvoja distribucijske krivulje slijedi iz usvojenog konstitutivnog modela tla (7). Naime, za male vrijednosti stupnja saturacije θ je promjena koeficijenta filtracije k gotovo zanemariva (slika 1). Tek kada se dosegne stanovita vrijednost stupnja saturacije θ , započinje se evidentirati znatan i nagli porast koeficijenta filtracije k (slika 1.). Dinamika porasta koeficijenta k ovisi o usvojenoj vrijednosti parametra distribucije pora n (7), tj. o statističkoj distribuciji veličine pora [6].

6. Zaključak

U radu je prikazan numerički model vertikalne infiltracije vode u nesaturiranu poroznu sredinu tla. S namjerom da se spozna i analizira dinamika prelaska iz nesaturiranog u saturirano stanje pora tla, koristio se rubni uvjet konstantnog natapanja površine tla. Između površine natapanja vodom i donje propusne granice domene toka, prostorne i vremenske promjene u polju $\theta(z,t)$ su definirane Richardsovom jednačbom. U svrhu iznalaženja aproksimativnog rješenja Richardsove jednačbe, prostorna i vremenska diskretizacija je provedena metodom konačnih razlika. Radi izrade numeričke analize toka, prikazani eksplicitni algoritam je implementiran u programskom paketu *MathCAD 14*. Od inicijalnog stanja saturacije tla, definiranog rezidualnim stupnjem saturacije θ_r , dobiveni rezultati prikazuju promjene u polju $\theta(z,t)$. Za definirane početne i rubne uvjete ispitan je utjecaj saturiranog koeficijenta filtracije k_s na dinamiku ispunjavanja pora tla. Numerički model upućuje na to da utjecaj koeficijenta k_s postaje važan tek nakon stanovitog vremena od trenutka t_0 u kojem započinje natapanje površine tla. Na isti način je ispitan i utjecaj veličine kapilarne difuzijai D , i to na položaj i oblik redistribucijske krivulje u tlu. U tu je svrhu prikazan slučaj u kojem je difuzija D dovoljno mala da se granica između saturiranog i nesaturiranog dijela tla ukazuje sa horizontalnom linijom. Drugim riječima, izdvojen je zanimljiv slučaj infiltracije vode (slučaj okarakteriziran sa samo dva stupnja saturacije). U navedenom primjeru se mogu razlikovati inicijalni stupanj saturacije θ_r (rezidualni stupanj saturacije) i potpuni stupanj saturacije θ_s (definiran na površini tla). Kako je prikazano na slici 4.c, za navedene uvjete toka su spomenute vrijednosti odvojene jasnom granicom. S druge strane, prikazan je i utjecaj daljnjeg povećavanja vrijednosti kapilarne difuzijai D na dinamiku napredovanja *vodene fronte*.

LITERATURA

- [1] Bear, J.: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1988.
- [2] Gjetvaj, G.; Travaš, V.: *Nasipi u hidromelioracionim radovima - Hidraulička analiza nestacionarnog tečenja kroz hidromelioracione nasipe*, Priručnik za hidrotehničke melioracije: Elementi planiranja sustava za navodnjavanje, Rijeka, Liber, str. 77-130, 2005.
- [3] Bronisz, C.L.; Hirt, C.W.: *Unsaturated flow in porous media*, Flow Science Inc., FSI-91-TN25R, 2005.
- [4] Gopalakrishnan, K.; Manik, A.: *A Mathematical Model for Predicting Isothermal Soil Moisture Profiles Using Finite Difference Method*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 2007.
- [5] Bear, J.: *Hydraulics of Groundwater*, McGraw-Hill International Book Co., 1979.
- [6] Guber, A.; Pachepsky, Ya.; Shein, E.; Rawls, W.J.: *Soil aggregates and water retention*, Development of Pedotransfer Functions in Soil Hydrology (Eds Ya. Pachepsky, W.J. Rawls), Elsevier, 2004.
- [7] Kumar, C.P.: *Modelling of unsaturated flow*, National Conference on "Modern Trends in Water Resources Development and Environmental Management", Vellore Institute of Technology, Vellore (Tamil Nadu), str. 1-9, 2002.
- [8] Ožbolt, J.; Balabanić, G.; Kušter, M.: *3D Numerical modelling of steel corrosion in concrete structures*, Corrosion Science, Volume 53, Issue 12, str. 4166-4177, 2011.

- [9] van Genuchten, M. Th.: *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*, Soil Science Society of America Journal, 44, str. 892-898, 1980.
- [10] Klute, A.; Gillham, R.W.: *An experimental study of soil water flow systems involving hysteresis*, Environmental Resources Center, Colorado State University, Completion Report No. 51, 1973.
- [11] Galvao, P.B.: *Solute dynamics in unsaturated soil*, Universidade Technica de Lisboa, Instituto Superior Tecnico, No 44786, 2002.
- [12] Phoon, K.; Tan, T.; Chong, P.: *Numerical simulation of Richards equation in partially saturated porous media: under-relaxation and mass balance*, Geotechnical and Geological Engineering, Volume 25, Number 5, 2007.
- [13] Tzimopoulos, C.; Evangelides, C.; Arampatzis, G.; Anastasiadis E.: *Water mass balance in the case of vertical infiltration*, Global NEST Journal, Vol 7, No 3, str. 274-280, 2005.
- [14] White, I.; Sully, M.J.: *Macroscopic and microscopic capillary length and time scales from field infiltration*, WaterResources Res., 23:str. 1514-1522, 1987.
- [15] Zhu, J.; Sun, D.: *Saturation-dependent anisotropy of unsaturated soil*, World Congress of Soil Science, Soil Solutions for a Changing World, Brisbane, Australia, 2010.
- [16] Aral, M. M.: *Environmental Modeling and Health Risk Analysis (Acts/Risk)*, Springer-Verlag, 2010.